

**SILVIO APARECIDO DA SILVA**

**OTIMIZAÇÃO DA LOCALIZAÇÃO DE CENTRALIZADORES E  
CONFIGURAÇÃO DE REDES PARA DISTRIBUIÇÃO DE  
ENCOMENDAS EXPRESSAS**

**CURITIBA**

**2010**

**SILVIO APARECIDO DA SILVA**

**OTIMIZAÇÃO DA LOCALIZAÇÃO DE CENTRALIZADORES E  
CONFIGURAÇÃO DE REDES PARA DISTRIBUIÇÃO DE  
ENCOMENDAS EXPRESSAS**

Dissertação de Mestrado apresentada como requisito parcial na obtenção do grau de Mestre em Programação Matemática, pelo Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia da Universidade Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. Celso Carnieri

Co-Orientador: Prof. Dr. Luiz Fernando Nunes

**CURITIBA**

**2010**

# **Termo de Aprovação**

SILVIO APARECIDO DA SILVA

## **OTIMIZAÇÃO DA LOCALIZAÇÃO DE CENTRALIZADORES E CONFIGURAÇÃO DE REDES PARA DISTRIBUIÇÃO DE ENCOMENDAS EXPRESSAS**

Dissertação aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Programação Matemática, pelo Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia da Universidade Federal do Paraná, pela seguinte banca examinadora:

---

Prof. Dr. Celso Carnieri  
Universidade Federal do Paraná

---

Prof. Dr. Luiz Fernando Nunes  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

---

Prof. Dr. Robinson Hoto  
Universidade Estadual de Londrina

## **Dedicatória**

Dedico este trabalho

Aos meus pais, Mario e Camília que apesar de todas as dificuldades sempre me apoiaram na busca de meus objetivos.

## **Agradecimentos**

Agradeço especialmente ao Professor Dr. Celso Carnieri pela paciência, apoio e orientação e ao Professor Dr. Luiz Fernandes Nunes pela auxílio na conclusão deste trabalho, e a todos os Professores do mestrado.

Agradeço aos meus amigos do Mestrado, Marcos, Wagner, Rogério, Jorge e Cleibson, excelentes estatísticos com os quais convivi durante o curso e ao meu grande amigo Luiz Ledo pelo seus ensinamentos.

Agradeço aos meus amigos Alisson, Mi, Marcelo, Jô, Herbert, Ane, Anderson, Vivaldo, Cadu, Larissa, Kito, Maga, Paulo, Thomas, Thiago, Pitu e Eliel, que me suportaram durante todo esse tempo e a Marcia Regina pelo apoio.

Aos meus amigos do trabalho Nilson, Thiago, Juliano, Ronaldo, Daviane, Silvana, Dani, Valdir, Enio e Julieta pela ajuda e incentivos.

Poderia citar diversos amigos, mas estes são os que estão próximos e me acompanharam nessa jornada.

Para finalizar agradeço aos meus pais e minhas irmãs pelo amor, carinho e confiança, e a todos que direta ou indiretamente contribuíram para esse momento.

## Epígrafe

Havia uma regra muito reveladora: os escravos deviam continuar analfabetos. No Sul antes da Guerra Civil, os brancos que ensinassem um escravo a ler eram severamente punidos. “[Para] criar um escravo satisfeito”, escreveu Bailey mais tarde, “é necessário criá-lo estúpido. É necessário obscurecer a sua visão moral e intelectual, e, na medida do possível, aniquilar o poder da razão.” É por isso que os senhores devem controlar o que os escravos ouvem, vêem e pensam. É por isso que a leitura e o pensamento crítico são perigosos, na verdade subversivos, numa sociedade injusta.

Carl Sagan.

# Sumário

<b>Lista de Figuras .....</b>	<b>vii</b>
<b>Lista de Tabelas .....</b>	<b>ix</b>
<b>Lista de Siglas .....</b>	<b>x</b>
<b>Resumo .....</b>	<b>xi</b>
<b>Abstract.....</b>	<b>xii</b>
<b>1 Introdução .....</b>	<b>1</b>
1.1 Objetivo do Trabalho .....	4
1.2 Estrutura do Trabalho .....	4
<b>2 Fundamentação Teórica .....</b>	<b>6</b>
2.1 Introdução .....	6
2.1.1 Pesquisa Operacional .....	6
2.1.2 Programação Linear .....	7
2.1.3 Modelo de Transporte e Designação .....	9
2.2 Programação Inteira .....	11
2.2.1 Relaxamento Linear .....	11
2.2.2 Branch and Bound .....	12
2.3 Modelo de Localização de Centralizadores (Facilitadores).....	13
2.3.1 Problema das P-medianas .....	14
2.3.2 Problema das P-medianas com Custo Fixo de Operação .....	15

2.3.3	Hierarquia no Modelo de Localização .....	17
2.3.4	Modelo Eixo-Raio ( <i>Hub-and-Spoke</i> ) .....	18
2.4	Heurísticas .....	23
2.4.1	Heurística de Teitz e Bart .....	23
2.4.2	Heurística de Teitz e Bart Modificada com Custo Fixo .....	25
2.4.3	Algoritmo de Teitz e Bart com Hierarquia .....	28
2.5	Análise de Regressão .....	31
2.5.1	Modelos Lineares Generalizados .....	31
<b>3</b>	<b>Material e Métodos .....</b>	<b>34</b>
3.1	Logística .....	34
3.2	Dados Utilizados .....	35
3.3	Metodologia .....	35
<b>4</b>	<b>Análise dos Resultados.....</b>	<b>37</b>
4.1	Função de Custo do Transporte .....	37
4.2	Aplicação da heurística de Teitz e Bart com Hierarquia .....	40
4.3	Aplicação da heurística de Teitz e Bart com Custo Fixo .....	47
<b>5</b>	<b>Conclusão e Recomendações .....</b>	<b>52</b>
5.1	Sugestões Para Trabalhos Futuros .....	53
	<b>Referências Bibliográficas .....</b>	<b>55</b>
	<b>Apêndice A – Qualidade dos Resíduos .....</b>	<b>59</b>
	<b>Apêndice B – Resultados Computacionais.....</b>	<b>60</b>
	<b>Anexo A – Distribuição de Probabilidade .....</b>	<b>62</b>
	<b>Anexo B – Custo Operacional do Transporte.....</b>	<b>63</b>



## Lista de Figuras

Figura 2.1	Fluxograma de uma iteração do método simplex .....	8
Figura 2.2	Representação do Ponto Ótimo Entre Quantidade de Facilidades e P-Mediana	16
Figura 2.3	Representação do Modelo Eixo-Raio .....	22
Figura 2.4	Fluxograma da Heurística de Teitz e Bart para P-Mediana	26
Figura 2.5	Fluxograma da Heurística de Teitz e Bart Modificado com Custo Fixo .....	29
Figura 4.1	Histograma e Gráfico de Percentis da Normal Padrão Variável Custo .....	38
Figura 4.2	Superfície de Resposta da Função de Custo .....	39
Figura 4.3	Mapa de Volume de Encomendas por Cidades .....	41
Figura 4.4	Mapa de Centralizadores Terceiro Nível .....	43
Figura 4.5	Mapa de Centralizadores Segundo Nível .....	45
Figura 4.6	Mapa de Centralizador Principal .....	47
Figura 4.7	Mapa de Centralizadores com Custo Fixo - Segundo Nível .....	50
Figura 4.8	Mapa de Centralizadores com Custo Fixo .....	51

Figura A.1 Gráfico da Qualidade dos Resíduos .....	59
Figura B.1 Custo Total por Quantidade de Mediana .....	61
Figura B.1 Representação da Linha de Transporte Rodoviária .....	66

## Lista de Tabelas

Tabela 2.1	Quantidade de Variável de Decisão Modelo Eixo-Raio	22
Tabela 4.1	Resumo das Principais Medidas na Tabela de Contratos de Transporte	37
Tabela 4.2	Estimativas dos Coeficiente do Modelo	39
Tabela 4.3	Quantidade de Encomendas por Classes	40
Tabela 4.4	Centralizadores do Terceiro Nível	42
Tabela 4.5	Centralizadores do Segundo Nível	44
Tabela 4.6	Centralizadores do Segundo Nível	49
Tabela B.1	Tempo Computacional da Heurística de Teitz e Bart	60
Tabela B.2	Tempo Computacional da Heurística de Teitz e Bart	61
Tabela B.1	Tipo de Veículo	64

## Lista de Siglas

PO	Pesquisa Operacional
PL	Programação Linear
PI	Programação Inteira
PLI	Programação Linear Inteira
PIM	Programação Inteira Mista
PIB	Programação Inteira Binária
CT	Custo Total
cf	Custo Fixo
MLG	Modelos Lineares Generalizados
AIC	Akaike Information Criterion
PRV	Problema de Roteamento Veículos
PCV	Problema do Caixeiro Viajante
CO	Custo Operacional
QV	Quantidade de Veículos
HM	Tempo Médio
PM	Percurso Médio
INCO	Índices para a Correção do Custo Operacional
CF	Custo fixo
CV	Custo variável
CR	custo de referência
Tr	tributos
TA	Taxa de Administração
CMT	Custo Mensal Total

## Resumo

Para modelar uma rede logística de transporte de encomenda expressa em uma área geográfica deve-se escolher determinados locais para instalar os centros de distribuição, que abasteçam as localidades da região com o menor custo, dado que para cada região existe uma demanda de encomenda expressa diferente que impacta diretamente no custo de transporte. A característica de uma rede logística de transporte de encomenda leva em consideração a hierarquia no sistema de distribuição. Em geral, os grandes centros de distribuição são responsáveis em abastecer centros menores. O modelo matemático de solução exata demonstrou ser de difícil aplicação para um grande número de variáveis, onde a solução se torna inviável computacionalmente. A aplicação proposta nesse caso é uma heurística para localização de  $p$ -medianas com hierarquia, onde é considerado um custo de transporte estimado através de um modelo de regressão linear generalizado, aplicado à heurística de Teitz e Bart modificada com hierarquias. Em um primeiro caso é considerado o número de  $p$ -medianas sem custo fixo de operação e, em um segundo, é considerada uma variável de custo fixo de operações das facilidades. Foi aplicado o algoritmo heurístico proposto em um estudo de caso para projetar uma rede de distribuição no Estado do Paraná, considerando os dados reais de uma empresa de transporte.

Palavras-chave: Problema  $p$ -mediana com hierarquia; Logística; MLG; heurística.

## Abstract

In order to model a transportation logistics network for express parcel in a given geographical area it is necessary to choose certain places to install the distribution centers, which will supply the region with the lowest cost, since each region has its own express parcel demands that directly impacts the cost of transport. The characteristic of a transportation logistics network for express parcel takes into account the hierarchy in the distribution system. In general, the large distribution centers are responsible for supplying smaller centers. The mathematical model of exact solution proved to be difficult to apply for a large number of variables, where the solution becomes computationally infeasible. The application proposed in this case is heuristic for finding  $p$ -medians with hierarchy, where it is considered a transportation cost estimated by a generalized linear regression model, applied to the Teitz and Bart heuristic modified with hierarchy. In a first case the number of  $p$ -median with no fixed cost of operation will be considered and a second case will consider a variable for the facilities operations fixed cost. It was applied the heuristic algorithm proposed in a case study to project a distribution network in Parana State, considering the real data of a transport company.

Key-words: Problem  $p$ -medians with hierarchy; logistics; GLM; heuristic.

# 1 Introdução

Um modelo matemático é uma representação da realidade suficientemente similar para que as suas conclusões possam ser estendidas a ela. Ele surge da necessidade do homem em compreender os fenômenos que o cercam para interferir ou não em seu processo de construção e portanto podem ser construídos sob diversas óticas de abordagens.

Diversas técnicas de modelagem para descrever um sistema real são conhecidos como modelos de Pesquisa Operacional (PO) e são estruturadas de forma lógica e amparado no feramental matemático objetivando claramente a determinação do melhor sistema representado. Os principais modelos de PO são denominados de Programação Matemática e constituem umas das mais importantes variedades de modelos quantitativos.

Um Modelo clássico da programação matemática é o modelo de Programação Linear (PL), o qual pode ser formulado de uma forma geral para otimizar (maximizar ou minimizar) uma função linear nas variáveis, chamada de “função objetivo”, sujeita a uma série de equações ou inequações lineares, chamadas restrições. Em geral seus resultados são determinísticos, o que nem sempre pode ser considerado verdade, pois os parâmetros para formulação do problema de PL podem ser variáveis aleatórias com uma determinada distribuição de probabilidade relacionadas a algum tipo de fenômeno natural, ou ao mercado e tendências futuras. Logo seus resultados diferem de um modelo determinístico de uma PL. Esses modelos são conhecidos como modelos de programação linear estocástica.

A Programação Linear permite o desenvolvimento de algoritmos eficientes e especializados em sua solução. O Modelo de Fluxo de Rede e Logística de Distribuição possui uma estrutura especial em Programação Linear. Nessa família de problemas um dos mais tradicionais é o problema de transporte.

O modelo de transporte visa minimizar o custo total do transporte necessário para abastecer centros de destinos (consumidores) a partir de centros de origens (fornecedores), levando em consideração o custo de transporte entre origem e destino.

Dentro da programação matemática podemos citar como outra classe de problemas

que envolvem um sistema de transporte os problemas de roteamento.

Um sistema de roteamento pode ser considerado como um conjunto organizado de meios que objetiva o atendimento de demandas localizadas nos arcos ou nos vértices de alguma rede de transportes (GOLDBARG e LUNA. 2000).

Os problemas de roteamentos em geral têm solução complexa e são difíceis de serem modelados.

Os modelos de redes de distribuição permitem a solução de importantes problemas reais e são de extraordinária aplicação prática. Alguns exemplos de aplicação que podem ser citados são: planejamento de rede de comunicação, distribuição de água para irrigação e redes de drenagem, na localização de postos e hospitais no sistema de saúde, postos policiais em uma cidade, nos serviços de correios e em rede de tráfego e logística de transporte rodoviário e aéreo.

Um modelo para localização de centralizadores pode ser formulado como um problema de  $p$ -medianas, onde definida a variável custo e a quantidade de  $p$ -medianas desejada e assumindo a variável de decisão como binária o modelo define a melhor configuração para sua localização em relação aos outros elementos analisados.

O problema de localização de centralizadores para transporte aéreo é tratado por BRYAN e O'KELLY (1999), esse tipo de problema pode ser abordado como um problema de eixo-raio (*Hub-and-spoke*). O modelo eixo raio proposto foi aplicado ao sistema de transporte de encomendas por ALAMO e BRINATI (2006).

O Modelo Irrestrito proposto por O'KELLY (1998) é a formulação matemática que proporciona a configuração de rede mais próxima das características desejadas para o serviço de transporte de encomendas expressas.

A principal característica do modelo eixo-raio proposto por O'Kelly é a natureza das variáveis inteiras binárias que exige um grande custo computacional que dependendo da quantidade de variáveis analisadas no problema pode tornar inviável a sua solução.

Para solucionar esse tipo de problema de natureza binária recorre-se muitas vezes aos métodos heurísticos. O procedimento heurístico pode ser definido como um método de aproximação das soluções dos problemas e para os modelos de localização das  $p$ -medianas a heurística de TEITZ e BART (1968) é uma das heurísticas que apresenta a melhor aproximação da resposta real.

Para modelar uma rede de distribuição para o sistema de transporte rodoviário de encomendas em uma área geográfica deve-se escolher determinado local para instalar um centro



de distribuição, que abasteça as localidades da região com o menor custo, dado que para cada região existe uma demanda de encomendas diferente que impacta diretamente no custo de transporte.

A quantidade de encomendas transportadas em determinada época do ano pelas empresas de transportes é uma variável aleatória que mantém dependência com alguns padrões espaciais e temporais. Estas duas características estão intimamente ligadas ao dimensionamento da frota utilizada pela transportadora. Esse serviço de transporte de encomendas envolve a coleta nas unidades de origem, a transferência da carga até terminais intermediários, a criação de grandes carregamentos a partir de vários outros pequenos, as transferências para outros terminais, a criação de carregamentos menores a partir de volumes maiores e a entrega no destino. Esse tipo de problema pode ser abordado como um problema de eixo-raio (*Hub-and-spoke*). Ao invés de servir cada demanda entre uma origem e um destino com uma conexão direta, os fluxos são reunidos a partir de centralizadores e enviados através de uma rede de centralizadores para serem então entregues aos respectivos destinos. Portanto, o problema consiste em encontrar a configuração de rede eixo-raio com o menor custo possível selecionando quais locais a se instalar um centralizador e atribuindo o tráfego a cada um deles.

Um outro exemplo de utilização desses modelos nas empresas de transporte é o serviço de logística integrada aplicada ao mercado eletrônico, onde após o recebimento do pedido da encomenda é feito o despacho a partir de um depósito principal que segue para o local de destino, ou para um depósito secundário, para depois ser encaminhada para a seu local de destino. A agilidade dessa operação depende de onde os depósitos ou centralizadores estarão instalados, para que ele possa fazer a entrega da encomenda em qualquer ponto de uma região geográfica com menor tempo possível e com economia de escala na sua distribuição.

A logística representa para os negócios via Internet o maior percentual de valor envolvido no seu processo. Utilizar-se do enfoque na logística é uma estratégia pela qual o comércio eletrônico pode obter vantagens competitivas na obtenção de menores custos.

A economia de escala é obtida pela empresa quando consegue obter um custo cumulativo menor da execução das atividades em relação ao custo da concorrência. Uma estratégia para a obtenção de uma vantagem de custo é a aplicação de modernos conceitos de logística o que garante uma maior relevância no conceito da administração da cadeia de suprimento ou *Supply Chain Management (SCM)*.

## 1.1 Objetivo do Trabalho

O objetivo do trabalho é propor uma solução de um modelo matemático de Programação Inteira Binária (PIB) para projetar uma rede de distribuição para o sistema de transporte de encomendas que leve em consideração as características aleatórias das variáveis de decisão e seus parâmetros e aplicar o modelo desenvolvido em um estudo de caso aos dados de encomendas de uma empresa real.

Em geral a característica de uma rede de encomendas leva em consideração a hierarquia no sistema de distribuição, sendo que as hierarquias são chamadas de níveis. Em um exemplo para uma rede com 3 níveis, dado um número de áreas de demandas são localizadas as facilidades da distribuição que chamaremos de terceiro nível. Dentre essas facilidades, localizaremos as facilidades para esses centros que será chamado de segundo nível. Para o primeiro nível pode-se definir um único facilitador ou centralizador primário.

Para uma rede com maior número de hierarquias, pode-se resolver sucessivamente, até encontrar o modelo de rede adequado.

Conforme NUNES (2002), considerando que os problemas de grande escala são intratáveis por métodos exatos, surge a necessidade de técnicas aproximadas que permitam encontrar bons resultados, em tempos computacionais aceitáveis.

A aplicação proposta nesse caso é a heurística de TEITZ e BART (1968) modificada, para localização de  $p$ -medianas com hierarquias, onde em um primeiro caso é considerado o número fixo de  $p$ -medianas sem custo fixo de instalação e em um segundo será considerado uma variável de custo fixo de instalação de facilidades.

Na aplicação do método heurístico foram considerados os custos de transporte estimados através de um modelo de regressão linear generalizado relativo aos dados da empresa real.

## 1.2 Estrutura do Trabalho

Este trabalho contém 5 capítulos, incluindo este que apresenta uma introdução e o objetivo da dissertação. No capítulo 2, é feita a fundamentação teórica, onde são apresentados os modelos relacionados ao trabalho. No capítulo 3 é explicado como foi resolvido o problema real que motivou este trabalho. No capítulo 4 são apresentados os resultados da aplicação do modelo e feita suas análises e finalmente no capítulo 5, fazem-se as conclusões e recomendações

de trabalho futuros relacionados ao tema.

## **2 Fundamentação Teórica**

### **2.1 Introdução**

#### **2.1.1 Pesquisa Operacional**

A idéia de construir modelos matemáticos sempre esteve presente nas teorias científicas e esses modelos podem ser encontradas em todo o desenvolvimento científico.

A origem da aplicação de modelos matemáticos na industria pode ser atribuída à revolução industrial onde teve uma grande importância, dada a necessidade de criar modelos teóricos para implementação de máquinas, centros de produção, produção em série e armazenamento, entre varias outras aplicações e onde a engenharia teve um papel importante na implementação destes modelos.

A aplicação destes modelos nas operações militares na 2º Guerra Mundial originou o nome de Pesquisa Operacional(PO), onde os métodos matemáticos e estatísticos foram aplicados no planejamento de táticas militares. Ela surgiu da necessidade de se resolver problemas de natureza logística e de estratégia militar de grande dimensão e complexidade. Após a 2º guerra mundial esses métodos foram aplicados para solucionar problemas de decisão e de grandes complexidades envolvendo empresas.

Pode-se dizer que a Pesquisa Operacional é uma ciência aplicada destinado para a resolução de problemas reais. Tendo como foco a tomada de decisões, aplicando conceitos e métodos de outras áreas científicas para concepção, planejamento ou operação de sistemas para atingir seus objetivos.

Assim a Pesquisa Operacional é uma ciência de características multidisciplinares e que se estende por muitos domínios da atividade humana.

Pode-se definir PO como um conjunto de técnicas que procuram obter o melhor desempenho de um sistema, definindo algumas medidas de desempenho, como custo, distância, lucro, satisfação e homogeneidade ou esforço.

O desenvolvimento computacional permitiu à Pesquisa Operacional desenvolver modelos cada vez mais complexos, de grandes proporções e de difíceis soluções, considerando assim essas técnicas cada vez mais próximas do estado da arte.

### 2.1.2 Programação Linear

Uma importante técnica de modelagem matemática em P.O é a programação Linear a qual consiste na otimização de uma função linear, sujeita a restrições também lineares, como em (2.1).

$$\begin{aligned} \text{Max(ou Min)} \quad f(x) &= cx \\ \text{sujeito a} \\ Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Onde o vetor  $c$  é a variável custo,  $x$  é o vetor da variável de decisão,  $b$  é o vetor de recursos e  $A = \{a_{ij}\}$  é conhecida como matriz tecnológica.

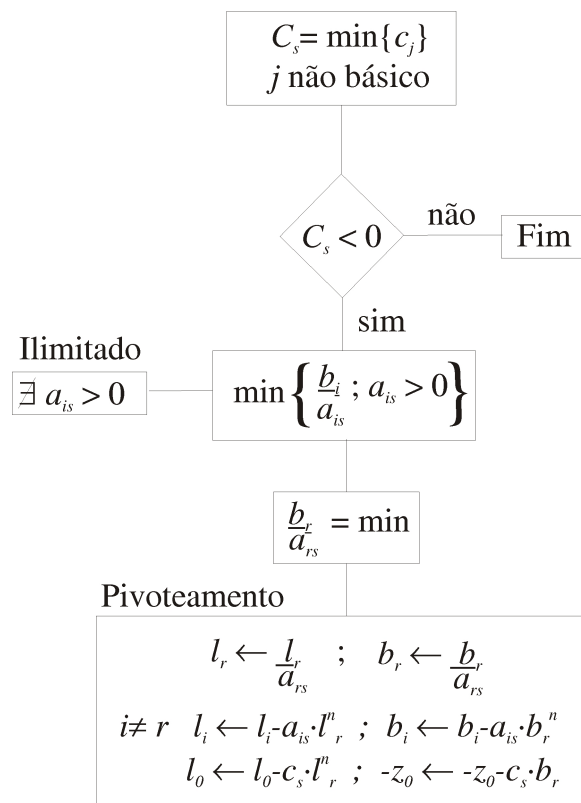
Diz-se que uma solução  $x$  para a PL é qualquer ponto que satisfaz

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Mas, a solução ótima  $x^*$  são apenas os pontos que satisfazem  $f(x^*) \geq f(x) \forall x$  solução, quando se deseja maximizar a função, ou  $f(x^*) \leq f(x) \forall x$  solução, se o problema é de minimização.

Esta abordagem para a PL somente se consolidou com George Dantzig, em 1947, que desenvolveu o Método Simplex, capaz de resolver em princípios qualquer problema de Programação linear. Surgiram depois outras propostas de soluções como o da Elipsoide de Kachan em 1979 e o Ponto Interior de Karmarkar em 1984, cada qual com sua especialidade.

O fluxograma da figura 2.1 na página 8, representa uma iteração do método simplex, a qual é realizada até a obtenção do resultado ótimo.



### 2.1.3 Modelo de Transporte e Designação

O modelo de Fluxo em Rede possui uma estrutura especial em Programação Linear que permite o desenvolvimento de algoritmos eficientes e especializados em sua solução. Nessa família de problemas, um dos mais tradicionais é o problema de transporte.

Os modelos de transporte consistem em abordar problemas relacionados a redes de distribuição. Eles visam minimizar o custo total do transporte necessário para abastecer  $n$  centros de consumidores(destinos) a partir de  $m$  centros fornecedores (origens). As quantidades disponíveis, ou oferta em cada origem são  $a_1, a_2, \dots, a_m$ . As quantidades requeridas ou demandas em cada destino são  $b_1, b_2, \dots, b_n$ . O custo unitário de transporte entre a origem  $i$  e destino  $j$  é  $c_{ij}$ . Sendo  $x_{ij}$  a quantidade a ser transportada da origem  $i$  ao destino  $j$ , o modelo toma o seguinte aspecto (PUCCINI e PIZZOLATO. 1987), considerando uma formulação clássica para o problema de transporte.

$$\begin{aligned}
 \text{Min } Z &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \\
 \text{sujeito a} & \\
 &\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad (i = 1, 2, \dots, m) \\
 &\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad (j = 1, 2, \dots, n) \\
 &x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m)(j = 1, 2, \dots, n)
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Nas restrições do modelo acima todos os coeficientes das variáveis são iguais a um.

Ao se somar as  $m$  restrições de oferta obtém-se:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} = \sum_{i=1}^m a_i \tag{2.4}$$

Ao se somar as  $n$  restrições de demanda obtém-se:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} = \sum_{i=1}^m b_j \quad (2.5)$$

Comparando, temos:

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{i=1}^m b_j \quad (2.6)$$

É mostrado que o modelo (2.3) destina-se ao problema equilibrado, onde suprimento e demanda são iguais. Caso isto não ocorra, cria-se suprimento ou uma demanda fantasma, conforme o caso.

O modelo de transporte pode ser solucionado através do método simplex mas em geral a solução ótima costuma ser obtida através de métodos alternativos, dadas as característica do problema.

O modelo matemático para o problema de designação é similar ao modelo de transporte introduzindo as variáveis de decisão binárias e assumindo restrição de oferta e demanda igual a 1.

O problema visa determinar quais as designações que devem ser feitas de modo a minimizar o custo total da operação, sabendo que uma origem  $i$  abastece um único destino  $j$ .

A formulação para o problema de designação é definido como:

$$\begin{aligned} \text{Min } Z &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \\ \text{sujeito a} & \\ &\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, m) \\ &\sum_{i=1}^m x_{ij} = 1 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \\ &x_{ij} \in \{0, 1\} \quad (i = 1, 2, \dots, m)(j = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Define-se as variáveis de decisão como:



$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se é designado } i \text{ a realizar a tarefa } j \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

O problema de designação é similar ao problema de transporte e pelas suas características admite um algoritmo especial para obtenção da solução ótima.

Como a solução do problema de designação admite apenas variáveis inteiras e, nesse caso, binárias, ela não pode ser obtida como um problema de programação linear que otimiza o valor para variáveis reais. Existe uma classe de algoritmos para solucionar esse tipo de problema que é conhecido como Problema de Programação Inteira.

## 2.2 Programação Inteira

Um caso específico da Programação Linear em que as variáveis são necessariamente inteiras é chamada de Programação Inteira (PI) ou Programação Linear Inteira (PLI).

Pode-se definir um modelo matemático de Programação Inteira como sendo um modelo de programação linear com restrições nas variáveis como inteiras.

Existem três tipos possíveis de problemas de Programação Linear Inteira. No primeiro tipo as variáveis de decisão são apenas variáveis inteiras. No segundo tipo de problema as variáveis são mistas (PIM), sendo que algumas variáveis de decisão podem ser inteiras e outras podem ser reais. No terceiro tipo de problemas, as variáveis são inteiras e binárias (PIB), sendo que as variáveis de decisão estão restritas a dois valores que podem ser definidas como 0 e 1 ou decisões do tipo sim e não.

### 2.2.1 Relaxamento Linear

Os métodos para solucionar os problemas de programação inteira são diferentes do método simplex utilizado nos problemas lineares com variáveis reais. Apesar disso a maioria dos algoritmos de programação inteira baseiam-se no método simplex. Isso é feito, associando um problema de programação inteira a um problema relaxado. Este método é conhecido como Relaxamento Linear.

Em um problema de maximização, o valor ótimo da função objetivo do Problema Relaxado, sempre representa um limite superior ao respectivo Problema Inteiro.

### 2.2.2 Branch and Bound

De acordo com GOLDBARG e LUNA (2000), o método Branch-and-bound(B&B) baseia-se na idéia de desenvolver uma enumeração inteligente dos pontos candidatos à solução ótima inteira de um problema. O termo *branch* refere-se ao fato de que o método efetua **partições** no espaço de soluções. O termo *bound* ressalta que a prova da otimalidade da solução utiliza-se de **limites** calculados ao longo da enumeração.

Definindo:

$$Z = \text{Maximizar}\{cx | Ax = b, x \geq 0, x \in \mathbb{Z}^+\}$$

e

$$\bar{Z} = \text{Maximizar}\{cx | Ax = b, x \geq 0, x \in \mathbb{R}^+\}$$

Definindo ainda  $Z$  e  $\bar{Z}$  os valores das funções objetivo no ponto ótimo para um problema de maximização respectivamente temos que:

$$Z \leq \bar{Z}$$

Vamos chamar o problema de  $P$  e a solução original  $\bar{Z}$ , criamos a relaxação linear deste problema apagando as restrições que obrigam  $x_j$  a ser inteiros.

Como há soluções admissíveis e a solução ótima tem valores não inteiros para variáveis inteiras o problema não é eliminado e passamos à primeira iteração.

Supondo que a primeira variável inteira com valor não-inteiro na solução ótima é  $x_i$ , logo  $x_i$  é a variável escolhida para ramificação.

Ainda segundo GOLDBARG e LUNA(2000) são criados dois subproblemas  $P_1$  e  $P_2$ . Os dois novos problemas ( $P_1$ ) e ( $P_2$ ) em que a envoltória convexa  $C$  de  $(P_1) \cup (P_2)$  ou  $\text{Conv}((P_1) \cup (P_2))$  está estritamente contida no envoltório de  $(P)$  ou  $\text{Conv}((P_1) \cup (P_2)) \subset \text{Conv}((P))$ .

$$\begin{array}{ll} (P_1) \text{Max } Z = & cx \\ \text{sujeito a} & \\ Ax \leq & b \\ x_i \leq & \lfloor x_i^0 \rfloor \\ x_i \in & \mathbb{Z} \end{array} \qquad \begin{array}{ll} (P_2) \text{Max } Z = & cx \\ \text{sujeito a} & \\ Ax \leq & b \\ x_i \leq & \lfloor x_i^0 \rfloor + 1 \\ x_i \in & \mathbb{Z} \end{array}$$

A solução ótima está ou em  $P_1$  ou em  $P_2$  onde os subproblemas são chamados de filhos de  $P$  e diremos que a variável  $x_i$  foi “ramificada”. Investigamos as possibilidades do ramo em cada nó, se conseguimos uma solução inteira, ela é a solução ótima, caso o contrário ramificamos e resolvemos os nós filhos, criando assim novos subproblemas  $P_3$ ,  $P_4$ ,  $P_5$  e  $P_6$ . Assim esse procedimento será repetido até obter a solução ótima inteira.

Observa-se que o B&B constrói uma árvore de resolução durante sua execução. Cada nó da árvore dá origem a dois nós filhos, a menos que o seu limite superior seja menor ou igual ao maior limite inferior global conhecido para um problema de maximização. Diz-se que o ramo que tem esse nó como raiz foi podado e nesse caso, o subproblema é considerado resolvido.

Para evitar resolver todos os nós são realizados testes de infactibilidade, qualidade e otimalidade.

A infactibilidade é quando não existe solução para o problema relaxado e por consequência não existe o que explorar naquele nó e assim poderá ser cortado.

A qualidade é quando a solução inteira encontrada em determinado nó tem um valor  $Z$  (no caso de maximização) menor que uma outra solução inteira encontrada.

A otimalidade a solução do PI no nó é factível para o problema original, consequentemente, não há o que ramificar e a exploração daquele nó pode ser encerrada.

Para os problemas de PIB onde as variáveis podem assumir apenas valores 0 ou 1, a ramificação é feita escolhendo-se uma variável que tem seu valor fixado em 0 em um dos subproblemas, e em 1 no outro. A melhor das soluções desses subproblemas é uma solução do problema original.

Em um caso extremo o particionamento pode gerar  $2^n$  problemas onde todas as  $n$  variáveis foram fixadas em 0 ou 1 e desta forma todas as suas respectivas soluções são conhecidas, no entanto isto deve ser evitado ao máximo, pois o custo computacional é altíssimo.

## 2.3 Modelo de Localização de Centralizadores (Facilitadores)

Nos últimos anos o mercado de serviços de entrega expressa no Brasil vem passando por transformações, devido aos seguintes fatores: aumento da demanda, surgimento do comércio eletrônico, aumento do acesso a banda larga e forte concorrência com a chegada de empresas de nível mundial.

Essas mudanças exigem que as empresas brasileiras ofereçam serviços de entrega mais eficientes e com custos reduzidos para se tornarem cada vez mais competitivas em um mercado globalizado.

Importantes técnicas de otimização são aplicadas nas decisões estratégicas das empresas para soluções de vários problemas operacionais.

As empresas de logística devem manter atenção especial no planejamento das cadeias de suprimentos, como escolher o melhor local a se instalar os centralizadores (facilitadores) para a distribuição de encomendas e produtos em uma determinada área geográfica.

Esse tipo de problema é tratado como de localização de  $p$ -medianas que tem como objetivo minimizar o custo ou a distância percorrida em relação ao centralizador. A primeira formulação do problema de  $p$ -mediana é apresentada por HAKINI (1964).

### 2.3.1 Problema das P-medianas

O problema das  $p$ -medianas formulado por CHRISTOFIDES (1975), consiste em um Problema de Programação Inteira Binária(PIB), da seguinte forma:

Onde:

$$\begin{aligned} \text{Min } Z &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij}x_{ij} \\ \text{sujeito a} \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (2.9)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ii} = p \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.10)$$

$$x_{ij} \leq x_{ii} \quad (2.11)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad (i = 1, 2, \dots, n)(j = 1, 2, \dots, n) \quad (2.12)$$

Em que:

Definimos a variável custos (ou distâncias) de  $c_{ij}$ , com  $c_{ii} = 0$  para todo  $i \in n$ ; e a variável  $x_{ij}$  é definida como de alocação, com  $x_{ij} = 1$  se o nó  $j$  é alocado à mediana  $i$ , e  $x_{ij} = 0$ , caso contrário,  $x_{ii} = 1$  se o nó  $i$  é uma mediana e  $x_{ii} = 0$ , caso contrário;  $p$  é o número de medianas e  $n$  é o número de nós.

As restrições (2.9) e (2.11) garantem que cada nó  $j$  é alocado a apenas um nó  $i$ , o

qual deve ser uma mediana. A restrição (2.10) determina o número exato de medianas a serem localizadas e a restrição (2.12) corresponde às condições de integralidade.

Mesmo com os avanços na área de informática dedicados à solução de problemas de Programação Matemática, esta formulação do problema das  $p$ -medianas é de difícil solução, o que leva às técnicas de solução heurísticas. Para o problema das  $p$ -medianas uma técnica muito utilizado é a heurística de TEITZ e BART (1968).

### 2.3.2 Problema das P-medianas com Custo Fixo de Operação

O modelo de  $p$ -medianas pode ser generalizado para incluir custos fixos na função objetivo, mantendo uma restrição para número máximo de  $p$ -medinas a serem calculadas pelo modelo. Esta generalização é necessária quando o custo de construir e operar facilidades varia entre pontos em potencial de localização das mesmas regiões.

Neste caso, a minimização da função objetivo depende da quantidade de instalações de facilitadores e o custo (distância) do transporte percorrido, sendo o modelo semelhante ao modelo de  $p$ -medianas onde podemos definir pelo seguinte modelo matemático.

$$\begin{aligned} \text{Min } Z &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij}x_{ij} + \sum_{i=1}^n f_i y_i \\ \text{sujeito a} \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (2.14)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ii} \leq p \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.15)$$

$$x_{ij} \leq y_i \quad (2.16)$$

$$x_{ij}, y_i \in \{0, 1\} \quad (i = 1, 2, \dots, n)(j = 1, 2, \dots, n) \quad (2.17)$$

Definimos assim o custo fixo  $f_i$  da função objetivo como o custo de instalação ou de operação de um facilitador (centralizador) no nó  $i$  e a variável  $y_i$  (0 ou 1) como a decisão de instalar ou não no local  $i$ . As restrições (2.15) alteram a condição de igualdade presente no modelo de  $p$ -medianas, e definem o número máximo de facilidades a serem localizadas, neste caso não representa necessariamente o ponto ótimo de equilíbrio entre os dois custos que compõem a medida de utilidade, pois está restringido a  $p$  facilidades por (2.15). Em outras palavras, o modelo acima incorpora uma restrição de investimento não considerada no modelo

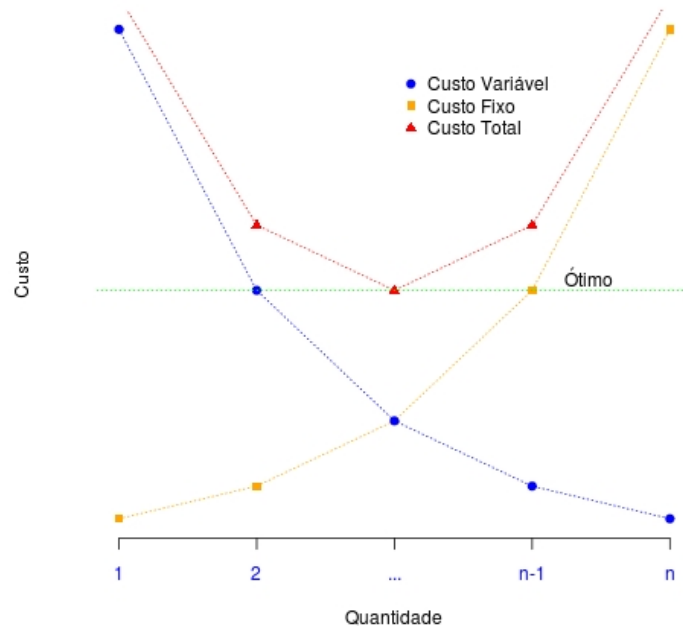


Figura 2.2: Representação do Ponto Ótimo Entre Quantidade de Facilidades e P-Mediana

das  $p$ -medianas sem o custo fixo.

Caso o valor de  $p$  nas restrições (2.15) seja considerado muito grande, o modelo buscará o equilíbrio entre o número de instalações de facilidades e a quantidade de  $p$ -medianas, pois quanto menor a quantidade de  $p$ -medianas definida, menor será o custo fixo, e quanto maior a quantidade de facilidades maior o custo fixo, como representado na figura 2.2 na página 16.

As definições dos custos fixos para os facilitadores dependem de uma série de variáveis e de decisões estratégicas para cada tipo de empresa.

Para o mercado de encomendas esses facilitadores são em geral chamados de centralizadores, pois eles centralizam uma quantidade de encomendas de uma determinada região, e o custo de instalação ou de operação desses centralizadores dependem da quantidade de encomendas da região, pois essa quantidade definirá o número de pessoas a trabalhar nesse centralizador. Dependendo do tamanho da instalação para esse centro e da cidade considerada, o valor do aluguel ou compra do imóvel, pode ter uma grande influência nestes custos e ainda podem ser agregados diversos custos de difícil mensuração.

### 2.3.3 Hierarquia no Modelo de Localização

Pode-se dizer que os sistemas de entrega de encomendas em uma área geográfica se relacionam hierarquicamente, entre suas unidades de distribuição. Por exemplo, uma unidade de distribuição sempre é abastecida por uma unidade de maior porte. Define-se as hierarquias de cada tipo de unidade como níveis.

Para hierarquia com 2 níveis, o serviço de entrega de encomendas oferecido pelos facilitadores do nível 2, são reponsáveis em abastecer determinada região, enquanto as facilidades de hierarquia superior oferecem tanto o serviços de nível 2 quanto o de nível 1, ou seja o nível 1 abastece sua região e abastece os facilitadores de nível 2.

Para a hierarquia com 3 níveis, superior à de 2 níveis, esse facilitador abastece a sua região e os facilitadores de nível 2 e nível 3, e assim sucessivamente.

Na prática, os sistemas que fornecem produtos ou serviços geralmente consistem de  $k(k > 2)$  tipos distintos de instalações.

Segundo NUNES (2002), um problema de localização-alocação com  $k$ -hierárquias pode ser estabelecido como: determinar as localizações-alocações para  $p_i$  instalações do tipo  $i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , dentre  $n(n \geq \sum_{i=1}^k p_i)$  possíveis localizações de instalações, tal que um certo critério seja otimizado.

NARULA (1984) propos um modelo de 2 níveis para localização de centros de serviços de saúde. Esse modelo foi aplicado por GALVÃO, NOBRE e VASCONCELLOS (1999) em centros de saúde no segundo nível e hospitais para o primeiro nível na cidade do Rio de Janeiro.

Um modelo proposto por O'KELLY (1998) em dois níveis foi aplicado ao mercado de encomendas aéreas. Esses modelos foram propostos inicialmente para localização de centralizadores para o transporte de passageiros, e são conhecidos como modelo Eixo-Raio(*hub-and-spoke*). Uma característica nesse modelo é que ele leva em consideração o custo fixo de instalação ou operação.

O modelo eixo-raio com algumas modificações foram aplicado em uma empresa de transporte rodoviário no Brasil, por ALAMO e BRINATI (2006) para projetar um sistema de transporte de encomendas.

A dificuldade na solução desse tipo de problema esta relacionada com a quantidade de variáveis de decisão do tipo binária que crescem exponencialmente, dependendo da quantidade de nós avaliados.

NUNES (2002) propos uma estratégia heurística baseadas no método de TEITZ e BART (1968), para solucionar esse tipo de problema.

### 2.3.4 Modelo Eixo-Raio (*Hub-and-Spoke*)

Os modelos eixo-raio constituem uma classe de problemas aplicados a localizar facilitadores em dois níveis. As primeiras propostas de modelo surgiram recentemente a partir de modelos formulados por CAMPBELL (1994), O’KELLY e MILLER (1994) e BRYAN e O’KELLY (1999), e inicialmente esses modelos foram propostos para projetar redes de transporte aéreo de passageiros e transporte de cargas aéreas. Em CAMARGO (2007) são descritas diversas aplicações para estes modelos.

Existem dois tipos básicos de redes Eixo-Raio(*hub-and-spoke*), diferenciando-se na maneira como estão conectados os facilitadores secundários (*spokes*) aos facilitadores principais (*hubs*).

No primeiro tipo de rede, denominado de **Alocação Única**, cada facilitador secundário está conectado a um único facilitador principal ou *hub*, de modo que todo o fluxo que sai ou chega ao nó tem que passar sempre pelo mesmo *hub* a ele alocado.

No segundo tipo de rede, denominado de **Alocação Múltipla**, cada facilidade secundária está conectada a mais de um facilitador principal ou *hub*, incrementado-se dessa maneira o número das ligações na rede.

Um modelo proposto por ALAMO e BRINATI (2006), para projetar um sistema de transporte de encomendas terrestre é uma modificação feita no modelo apresentado por O’KELLY (1998), onde segundo os autores,

“O modelo irrestrito proposto por O’KELLY (1998) é a formulação matemática que proporciona a configuração de rede mais próxima das características desejadas para o serviço de transporte de encomendas expressas.”

Abaixo é apresentada uma formulação para o modelo proposto por ALAMO e BRINATI (2006), excluindo a variável de quantidade transportada e com uma modificação na restrição(2.23).

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n (c_{ik} + c_{kj})x_{ikj} + \sum_{k=1}^n F_k H_k + \sum_{i=1}^n \sum_{m=1}^n \sum_{j=1}^n (c_{im} + c_{mj})y_{imj} + \sum_{m=1}^n f_m h_m \quad (2.18)$$

Sujeito às seguintes restrições:



$$\sum_{k=1}^n H_k = 1 \quad (2.19)$$

$$\sum_{m=1}^n h_m \leq p \quad (2.20)$$

$$x_{ikj} - H_k \leq 0 \quad (2.21)$$

$$y_{imj} - h_m \leq 0 \quad (2.22)$$

$$\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ikj} + \sum_{m=1}^n \sum_{j=1}^n y_{imj} = 1 \quad (2.23)$$

$$\sum_{m=1}^n V_{im} \leq 1 \quad (2.24)$$

$$V_{im} \leq y_{im} \quad (2.25)$$

$$\sum_{j=1}^n y_{imj} \leq nV_{im} \quad (2.26)$$

$$\sum_{i=1}^n Y_{imj} \leq nV_{jm} \quad (2.27)$$

$$y_i + V_{jm} \leq 1 \quad (2.28)$$

$$d_{im}y_{imj} \leq R_{max} \quad (2.29)$$

$$d_{mj}y_{imj} \leq R_{max} \quad (2.30)$$

$$H_k, h_m, x_{i,k,j}, y_{i,m,j}, V_{i,m} \in \{0, 1\} \quad (2.31)$$

Onde a restrição (2.19) especifica que a posição  $k$  do hub principal seja selecionada a partir dos  $n$  locais candidatos.

A restrição (2.20) especifica que poderão ser selecionadas até  $p$  mini-hubs ( $m$  entre os  $n$  locais candidatos menos o local do hub-principal).

A restrição (2.21) impõe condições para que a interação entre  $i$  e  $j$  seja feita entre o hub principal localizado em  $k$ , para todos  $i, k, j$ , tais que  $i \neq j$

A restrição (2.22) impõe condição para que a interação entre  $i$  e  $j$  seja feita entre o mini-hub localizado em  $m$ , para todos  $i, m, j$ , tais que  $i \neq j$

A restrição (2.23) especifica que a demanda do par  $(i, j)$  deverá ser atendida através de um hub principal ou mini-hub. Aqui é feita uma modificação no modelo de O'Kelly. Essa modificação na restrição impede que as origens e destinos visitados pelo mini-hub sejam novamente visitadas pelo hub principal, para todos  $i, m, j$ , tais que,  $m = j$ .

A restrição (2.24) é acrescentada por Alamo e Brinati ao modelo de O'Kelly. Essa restrição garante que toda a instalação  $i$  esteja conectada a no máximo, um único mini-hub  $m$  para envio de sua carga aos demais locais de sua região de influência, para todos  $i, m$ , tais que  $i \neq m$ .

A restrição (2.25) assegura que todo o local  $i$  ligado ao mini-hub  $m$  encaminhe sua carga às demais instalações da sua região sempre via o mini-hub  $m$  dentro de sua região, para todos  $i, m$ , tais que  $i \neq m$ .

A restrição (2.26) indica que o local  $i$  pode enviar carga até vários destinos  $j$  passando pelo mini-hub  $m$ , somente se o mini-hub  $i$  está conectado ao mini-hub  $m$ , para todos  $i, m$ , tais que  $i \neq m$ .

A restrição (2.27) indica que somente pode haver movimentação de carga para  $j$  a partir de diversos locais  $i$  passando pelo mini-hub  $m$ , se o local  $j$  esteja conectado ao mini hub  $m$ , para todos  $m, j$ , tais que  $m \neq j$ .

A restrição (2.28) impede qualquer ligação entre mini-hubs, já que se  $i$  é mini-hub ele não pode estar alocado no mini-hub  $j$ , para todos  $i, m$ , tais que  $i \neq m$ .

As restrições (2.29 e 2.30) relacionadas ao raio máximo de influência dos mini-hubs são opcionais.

A restrição (2.29) limita a distância entre o local origem  $i$  e o mini-hub  $m$ , para todos  $i, m, j$ , tais que  $i \neq j$

A restrição (2.30) limita a distância entre o local origem  $j$  e o mini-hub  $m$ , para todos  $i, m, j$ , tais que  $i \neq j$

As restrições (2.31) impõe que as variáveis de posição  $H_k$  e  $h_m$  e as de alocação  $x_{ikj}, y_{imj}$  e  $V_{im}$  podem assumir somente valores binários 0 e 1.

Este modelo foi de difícil aplicação, pois para determinada quantidade de variáveis o modelo se torna inviável computacionalmente.

O modelo gera uma quantidade de variáveis de decisão igual à  $2n^3 + n^2 + 2n$  onde  $n$  é a quantidade de nós do problema.

Um outro problema é que o modelo define duas hierarquias. Uma para os mini-*hub* e outra para localizar um único *hub* principal. Para se definir a terceira hierarquia, o problema ficaria muito complexo.

Para testar o modelo foi gerado um exemplo de aplicação para um conjunto de coordenadas com 20 pontos através de uma distribuição uniforme (0 a 50) e um conjunto de 20 valores de custo fixo de instalação para a variável  $H_k$  e  $h_m$  através da distribuição uniforme (0 a 5). Para o custo de transportes foi usada a distância euclidiana do ponto  $i$  ao  $j$ .

Neste exemplo foi atribuído o valor 4 para a variável  $p$ , ou seja o modelo irá decidir entre 4 ou menos medianas para o segundo nível e atribuímos o valor 30 para a variável  $R$ (raio). Logo ele irá escolher apenas nós que estejam dentro do raio de influência do mini-*hub* de distância menor ou igual a 30, sendo essa variável opcional. Este modelo foi rodado no software R2.10.1 por ser livre e fácil de utilizar, utilizando o pacote *lpsolve* para solução de problema de programação linear com variáveis binárias.

A escolha do número de nós igual a 20 para o exemplo apresentado, não é uma escolha arbitrária. A quantidade de nós escolhida foi o número máximo de nós que um computador equipado com um processador AMDTurion com 2.0 GHz de velocidade, 1 GB de memória RAM e 120 GB de armazenamento de HDD conseguiu processar. Se atribuirmos o número 20, a função apresentada para a quantidade de variáveis de decisão, obtemos 16440 variáveis de decisão.

A tabela 2.1 mostra como cresce a quantidade de variáveis de decisão do tipo binária para o modelo Eixo-Raio.

A dificuldade na resolução do problema é descrita por HILLIER & LIEBERMAN (2010) conforme segue abaixo.

“Os problemas de programação inteira binária (PIB) com  $n$  variáveis, há  $2^n$  soluções

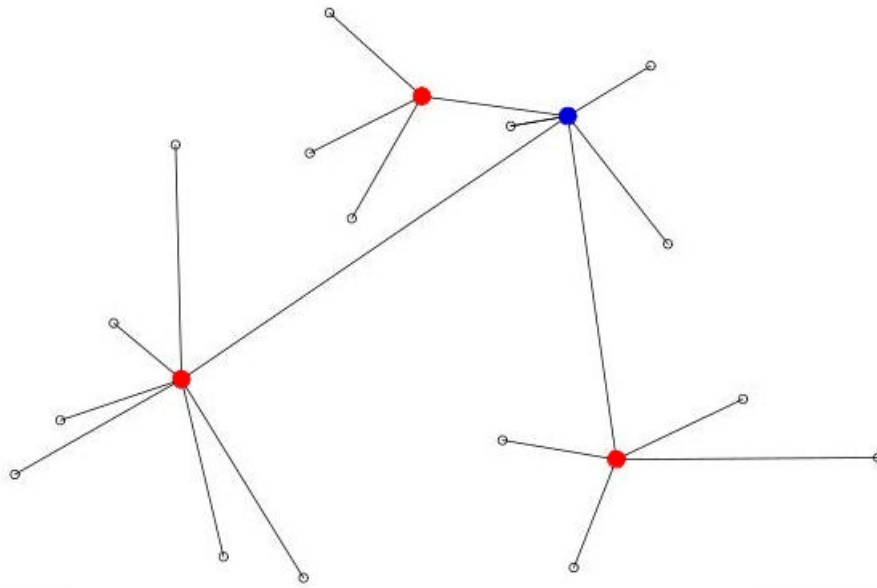


Figura 2.3: Representação do Modelo Eixo-Raio

Tabela 2.1: Quantidade de Variável de Decisão Modelo Eixo-Raio

<i>Quantidade de nós</i>	Variáveis de Decisão
1	5
5	285
10	2120
15	7005
20	16440
25	31925
30	54960
...	...
50	252600

a serem consideradas (nas quais algumas delas podem ser descartadas posteriormente, pois violam as restrições funcionais). Portanto, cada vez que  $n$  for incrementado em 1, o número de soluções dobra. Esse padrão é conhecido como crescimento exponencial da dificuldade do problema. Com  $n = 10$ , há mais de 1.000 soluções (1.024); com  $n = 20$ , há mais de 1.000.000; com  $n = 30$ , há mais de 1 bilhão e assim por diante. Dessa maneira, até mesmo os computadores mais rápidos são incapazes de realizar uma enumeração tão exaustiva (verificar se cada uma das soluções é viável ou não e, em caso positivo, calcular o valor da função objetivo).”

Isto justifica a necessidade de uma solução heurística para problemas de programação inteira binária com essas características.

## 2.4 Heurísticas

As heurísticas são geralmente aplicadas para solucionar problemas complexos, exaustivos e com informações incompletas, e são de grande utilização na solução de problemas de programação discreta, segundo GOLDBARG e LUNA (2000) os quais conceituam heurística por:

“Uma heurística é uma técnica que busca alcançar uma boa solução utilizando um esforço computacional considerado aceitável, sendo capaz de garantir a viabilidade ou a otimalidade da solução encontrada ou, ainda, em muitos casos, ambas, especialmente nas ocasiões em que essa busca partir de uma solução viável próximo ao ótimo.”

Na resolução de problema das  $p$ -medianas uma heurística que pode apresenta um bom desempenho é a TEITZ e BART (1968).

### 2.4.1 Heurística de Teitz e Bart

A heurística das  $p$ -medianas de Teitz e Bart é baseada na substituição de vértices e seu objetivo é, a partir de uma solução inicial, melhorar o valor da função objetivo a cada iteração. A implementação computacional desta heurística é fácil e produz soluções satisfatórias para os problemas de localização de facilidades.

Para um grafo  $G(V, E)$ , define-se número de *out-transmission* e *in-transmission* e para cada vértice  $v_i \in V$ , mas trataremos apenas o caso de *out-transmission* como um grafo não direcionado onde  $V$  são os seus vértices e  $E$  as suas arestas.

Chama-se de número de transmissão do vértice  $v_i$ , representado por  $\sigma(v_i)$  a soma das menores distâncias existentes entre o vértice  $v_i$  e todos os outros vértices  $v_j$  do grafo  $G$ . Sendo  $n$  o número total de vértices do grafo, o número de transmissão  $\sigma_o(v_i)$  é dado por:

$$\sigma_o(v_i) = \sum_{v_j \in V} \theta_j d(v_i, v_j) \quad (2.32)$$

Onde  $d(v_i, v_j)$  é a menor distância entre os vértices  $v_i$  e  $v_j$ ,  $\theta_j$  é o peso associado ao vértice  $v_j$ . Conforme CHRISTOFIDES (1975), são chamadas de *out-mediana* de um grafo, os vértices  $v_o$  que satisfazem as condições iniciais:

$$\sigma_o(v_o) = \min_{v_i \in V} [\sigma(v_i)] \quad (2.33)$$

Para generalizar estes conceitos de transmissão para  $p$ -medianas, considera-se  $V_p$  um subconjunto do conjunto de vértices  $V$  do grafo  $G(V, E)$ , que possui  $p$  elementos, isto é,  $|V_p| = p$ . Define-se ainda:

$$d(V_p, v_j) = \min_{v_i \in V_p} [d(v_i, v_j)] \quad (2.34)$$

Onde  $d(V_p, v_j)$  representa a distância do subconjunto de vértices  $V_p$  até o vértice  $v_j$ . Analogamente ao que foi feito para um só vértice, define-se os números de transmissão, para o conjunto  $V_p$ , da seguinte forma:

$$\sigma_o(V_p) = \sum_{v_j \in V}^n \theta_j d(V_p, v_j) \quad (2.35)$$

Finalmente, chama-se de  $p$ -out-median aos conjuntos  $V_{p_o}$ , respectivamente, para os quais:

$$\sigma_o(V_{p_o}) = \min_{V_p \subset V} [\sigma_o(V_p)] \quad (2.36)$$

Assim pode-se definir os passos para o algoritmos de  $p$ -mediana de Teitz e Bart da seguinte forma.

### Algoritmo de Teitz e Bart das $p$ -Medianas

Inicialmente escolhe-se um conjunto  $S$  formado por  $p$  vértices, considerado como uma aproximação do conjunto  $V_p$  das  $p$ -medianas. Procura-se substituir, de acordo com o algoritmo abaixo, algum vértice  $v_j \in S$ , produzindo um novo conjunto  $S'$  tal que:

$$\begin{aligned} S' &= S \cup \{v_i\} - \{v_j\} \\ &\text{e} \\ \sigma(S') &< \sigma(S) \end{aligned}$$

Se isto for possível, substituímos  $v_j$  por  $v_i$  e  $S'$  é considerado uma nova aproximação para o conjunto  $V_p$ . O algoritmo prossegue até que se obtenha um conjunto  $S$ , onde nenhuma substituição de vértices produza um número de transmissão menor.

Os passos para este algoritmo são os seguintes:

**Passo 1.** Construa um conjunto inicial  $S$ , com  $p$  elementos de  $V$ ;

**Passo 2.** Rotule todos os vértices  $v_i \notin S$  como “não analisados”;

**Passo 3.** Enquanto existirem vértices “não analisados” no conjunto  $V - S$ , faça:

a) Selecione um vértice “não analisado”  $v_i \in V - S$ , e calcule a redução  $\Delta_{ij}$  do número de transmissão,  $\forall v_j \in S$ :

$$\Delta_{ij} = \sigma(S) - \sigma(S \cup \{v_i\} - \{v_j\}) \quad (2.37)$$

b) Faça

$$\Delta_{ijo} = \max_{v_j \in S} [\Delta_{ij}] \quad (2.38)$$

c) Se  $\Delta_{ijo} > 0$  faça  $S \leftarrow S \cup \{v_i\} - \{v_{jo}\}$  rotulando  $v_{jo}$  como “analisado”;

d) Se  $\Delta_{ijo} \leq 0$  rotule  $v_i$  como “analisado”.

**Passo 4.** Se durante a execução do passo anterior ocorrerem modificações no conjunto  $S$ , volte ao passo 2. Caso contrário PARE. O conjunto  $S$  será uma aproximação para o problema das  $p$ -medianas.

Um fluxograma para o algoritmo de Teitz e Bart é apresentado na figura 2.4.

## 2.4.2 Heurística de Teitz e Bart Modificada com Custo Fixo

A proposta para a heurística de Teitz e Bart modificada com custo fixo de operação, utiliza-se da idéia apresentada na figura 2.2 na página 16, para achar o ponto de equilíbrio entre a quantidade de  $p$ -medianas selecionadas e a quantidade de facilidades a serem instaladas definidas pelo custo fixo. Para isso cria-se uma variável que chamamos de custo total (CT), e atribuímos um valor grande para ela, que representa o custo total de transmissão com a soma do valor do custo fixo (cf) de operação. Ou seja, enquanto aumenta a quantidade de  $p$ -mediana diminui o custo das atribuições, e enquanto aumenta a quantidade de instalações fixas, a soma aumenta o custo fixo das mesmas.

Inicia-se o algoritmo de Teitz e Bart com  $p = 2$  elementos do subconjunto  $S$ , e para o cálculo da transmissão de  $\sigma(V_p)$  é somado o valor da variável custo fixo (cf) de operação

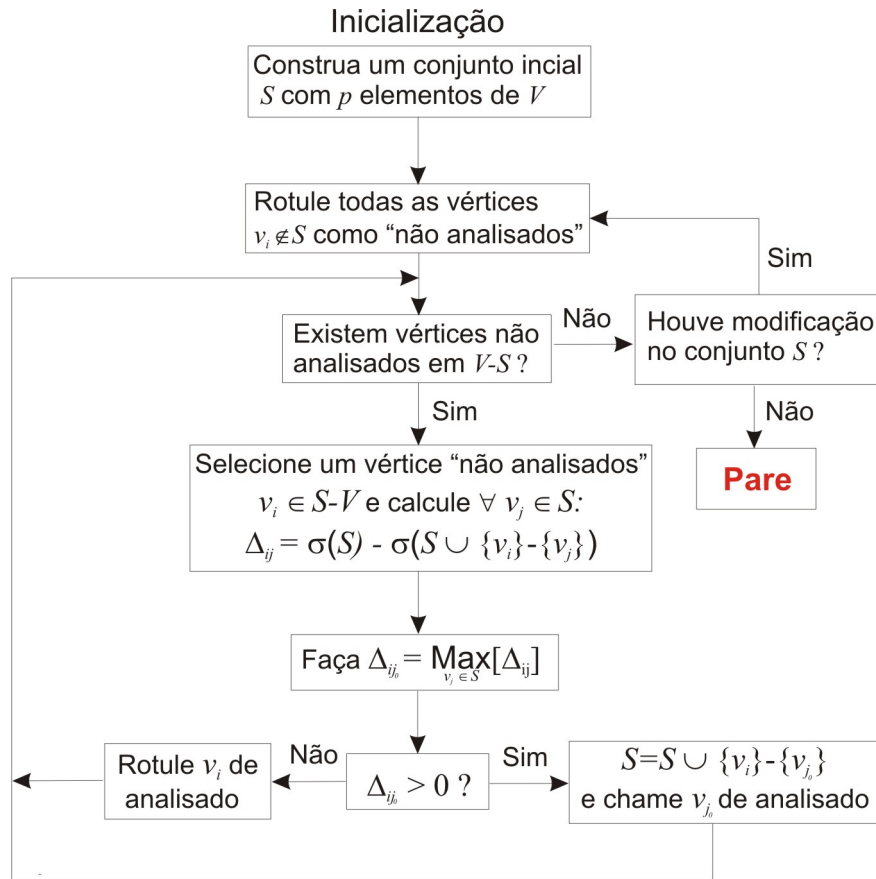


Figura 2.4: Fluxograma da Heurística de Teitz e Bart para P-Mediana

das facilidades nas localidades determinadas nos pontos  $i$  atribuídas às  $p$ -mediana, onde nesse caso pode-se definir  $\sigma(V_p)$  como:

$$\sigma_o(V_p) = \sum_{v_j \in V} \theta_j d(V_p, v_j) + \sum_{v_i \in S} c f_{v_i} \quad (2.39)$$

Assim, pode-se definir como as  $p$ -mediana aos elementos do conjunto  $V_p$ , e somando o custo fixo de operação destas instalações obtem-se:

$$\sigma_o(V_{p_o}) = \min_{V_p \subset V} [\sigma_o(V_p)] \quad (2.40)$$

Assim, do mesmo modo que é feita a substituição das vértices para encontrar a redução  $\Delta_{ij}$ , também é somado o novo valor para o custo fixo  $i$  relacionado aos vértices  $V_p \in S$ , para cada nova mediana testada.

Após o algoritmo de Teitz e Bart encontrar a melhor aproximação do resultado para  $p = 2$ . O valor de  $\sigma(S)$  será comparado com a variável  $CT$ . Como o valor de  $CT$  é muito grande, será atribuído o valor de  $\sigma(S)$  para a variável  $CT$ .



Para dar sequência ao algoritmo atribui-se  $p = p + 1$ , e nesse caso o valor para  $p$  será 3, após encontrar o melhor aproximação do resultado para  $p = 3$  é comparado novamente o valor  $CT$  com  $\sigma(S)$  e caso o valor seja menor do que  $CT$  é atribuído esse valor encontrado à variável  $CT$  e o algoritmo reinicia novamente com  $p = p + 1$ . O algoritmo realiza essa operação até  $\sigma(S)$  for maior que  $CT$ . Nesse caso, o melhor resultado possível está em  $p - 1$  medianas.

### O algoritmo de Teitz e Bart das $p$ -medianas com Custo Fixo

Define-se uma variável custo total ( $CT$ ), e atribuí-se um valor muito grande para essa variável. O valor deve ser grande para que na primeira iteração do algoritmo ele receba um novo valor.

Inicialmente escolhe-se um conjunto  $S$  formado por  $p = 2$  vértices, considerado como uma aproximação do conjunto  $V_p$  das  $p$ -medianas. Para os vértices  $v_i \in V - S$ , pode-se substituir, de acordo com o algoritmo abaixo, algum vértice  $v_j \in S$ , produzindo um novo conjunto  $S'$  tal que:

$$\begin{aligned} S' &= S \cup \{v_i\} - \{v_j\} \\ &\text{e} \\ \sigma(S') &< \sigma(S) \end{aligned}$$

Assim substituímos  $v_j$  por  $v_i$  e  $S'$  levando em consideração a variável de custo fixo de instalação em  $v_i$  e  $S'$  é considerado uma nova aproximação para o conjunto  $V_p$ . O algoritmo prossegue até que se obtenha um conjunto  $S$  com custo fixo, onde nenhuma substituição de vértices produza um número de transmissão menor.

A cada iteração será atribuído o valor  $p + 1$  para as  $p$ -medianas, até o valor de  $\sigma(S)$  seja maior que a variável  $CT$ . Assim a variável realiza uma ultima execução para  $p - 1$  medianas, que será o valor ótimo que equilibra a quantidade de  $p$ -medianas e de custo fixo de operações.

Os passos para este algoritmo são os seguintes:

**Passo 1.** Atribuir um valor grande para  $CT$

A partir do passo 2 até o passo 5 o procedimento para execução da heurística é similar a heurística sem custo fixo.

**Passo 2.** Construa um conjunto inicial  $S$ , com  $p = 2$  elementos de  $V$ ;

**Passo 3.** Rotule todos os vértices  $v_i \notin S$  como “não analisados”;

**Passo 4.** Enquanto existirem vértices “não analisados” no conjunto  $V - S$ , faça:

a) Selecione um vértice “não analisado”  $v_i \in V - S$ , e calcule a redução  $\Delta_{ij}$  do número de transmissão levando em consideração o custo fixo relacionadas às vértices analisadas,  $\forall v_j \in S$ :

$$\Delta_{ij} = \sigma(S) - \sigma(S \cup \{v_i\} - \{v_j\}) \quad (2.41)$$

b) Faça

$$\Delta_{ijo} = \max_{v_j \in S} [\Delta_{ij}] \quad (2.42)$$

c) Se  $\Delta_{ijo} > 0$  faça  $S \leftarrow S \cup \{v_i\} - \{v_{jo}\}$  rotulando  $v_{jo}$  como “analisado”;

d) Se  $\Delta_{ijo} \leq 0$  rotule  $v_i$  como “analisado”.

**Passo 5.** Se durante a execução do passo anterior ocorrerem modificações no conjunto  $S$ , volte ao **passo 3**. Caso contrário, o conjunto  $S$  será uma aproximação para o problema das  $p$ -medianas.

**Passo 6.** Se  $CT > \sigma(S)$ , atribua esse novo valor de  $\sigma(S)$  à variável  $CT$  e faça:

a)  $p = p + 1$

b) volte ao **passo 2** com o novo valor de  $p$ .

Caso contrário. Se  $CT < \sigma(S)$ , o custo que minimiza  $CT$  ocorreu em  $p - 1$ , então faça:

a)  $p = p - 1$

b) volte ao passo 2 com o novo valor de  $p$  e realize a última execução do algoritmo.

Após o termino desse passo, PARE.

Um fluxograma para o algoritmo de Teitz e Bart modificado com custo fixo é apresentado na figura 2.5.

### 2.4.3 Algoritmo de Teitz e Bart com Hierarquia

O procedimento para re-atribuição pode ser definido a partir das facilidades localizadas no primeiro estágio da aplicação da heurística. Nela poderemos definir como será aplicada a heurística no segundo estágio, afim de localizar as facilidades do primeiro nível. Assim esse



Para detalhar o procedimento utilizando o algoritmo de Teitz e Bart sem o custo fixo de operação para 3 níveis aplicado ao mercado de encomendas expressas, onde o primeiro nível será um único centralizador principal, pode-se definir o seguinte procedimento: o primeiro passo para localizar as facilidades utilizando a heurística de Teitz e Bart exige que seja definida a quantidade de  $p$ -medianas ( $p < n$ ) e a localização das instalações no primeiro estágio.

São atribuídas as unidades localizadas no primeiro estágio a demanda da sua região de influência e recalculado o custo de transporte para essas localidades. Assim é definido um valor para localizar a quantidade  $q$  das novas medianas do segundo estágio onde  $q < p$ .

Para o último estágio será atribuído um único centralizador que será selecionado a partir dos  $q$  locais medianos do segundo estágio. O objetivo principal é que a partir desse centralizador principal a encomenda encaminhada é capaz de chegar a qualquer ponto da rede com o menor custo possível. Desta forma, estas re-atribuições buscam encontrar as designações ótimas, das instalações para os clientes.

Para detalhar a re-atribuição utilizando o algoritmo de Teitz e Bart modificado com custo fixo de operação, utiliza-se o mesmo procedimento anterior, sem a necessidade de definir a quantidade  $p$ .

Nesse caso o resultado para o primeiro estágio da aplicação depende do custo das facilidades em determinadas localidades, pois a heurística deve encontrar o equilíbrio entre a abertura de uma unidade com a quantidade de  $p$  medianas suficiente para essas localidades onde os custo sejam mais vantajosos.

Para o segundo estágio da aplicação pode-se levar em consideração duas situações:

A primeira fazendo a re-atribuição para a heurística de Teitz e Bart sem aplicação do custo fixo, pois nesse caso o custo já foi atribuído no primeiro estágio e considera esse custo o único custo fixo aplicado.

A segunda situação seria atribuir novos custos para as localidades do primeiro estágio, esses novos custos seria resultado da nova demanda de fluxo naquele nó, aplicando assim novamente a heurística de Teitz e Bart com custo fixo e novamente ele definirá a quantidade de localidades a serem atribuídas ao segundo estágio.

Esse procedimento pode-se repetir até obter o melhor modelo de rede possível, ou fixar  $p = 1$  e selecionar um centralizador principal entre as localidades selecionadas no estágio anterior.

## 2.5 Análise de Regressão

O custo de transporte é uma função não linear, contínua e positiva que depende de um conjunto de variáveis. Este projeto utilizou-se de uma análise de regressão para modelar uma função de custo que atribuiu um valor de transporte de um ponto  $i$  ao ponto  $j$ , sendo esse valor aplicado na heurística proposta no trabalho.

A análise de regressão é uma ferramenta estatística que utiliza a relação entre duas ou mais variáveis tal que uma variável possa ser explicada, chamada de variável dependente pelas outras variáveis explicativas ou independentes.

O objetivo é determinar como duas ou mais variáveis se relacionam, estimando a função que determina a relação entre duas ou mais variáveis e utilizar a função para prever e prever valores da variável dependente.

### 2.5.1 Modelos Lineares Generalizados

Os modelos lineares generalizados (MLG) são uma extensão dos modelos normais lineares e foram introduzidos por NELDER e WEDDERBURN (1972). segundo PAULA (2004).

“A idéia básica consiste em abrir o leque de opções para a distribuição da variável resposta, permitindo que a mesma pertença à família exponencial de distribuições”

Os modelos são usados geralmente quando se tem uma única variável aleatória  $Y$ , associada a um conjunto de variáveis explicativa  $x_1, \dots, x_p$ .

Considere um conjunto de variáveis aleatórias independentes  $y_1, \dots, y_n$ , provenientes de uma mesma distribuição que faz parte da família exponencial da forma.

$$f(y, \theta_i, \phi_i) = \exp\{\phi[y\theta_i - b(\theta_i)] + c(y, \phi)\}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.43)$$

onde  $b(\cdot)$  e  $c(\cdot)$  são funções conhecidas, sendo  $\phi > 0$  um parâmetro de dispersão e o parâmetro  $\theta_i$  denominado parâmetro canônico e a distribuição da família exponencial tem médias  $\mu_1, \dots, \mu_n$ , ou seja,

$$E(y_i) = \mu_i = b'(\theta_i), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.44)$$

Os componente sistemáticos são as variáveis explicativas que entram na forma de uma soma linear de seus efeitos,

$$\begin{aligned}\eta_i &= \sum_{r=1}^p x_{ir} \beta_j = x_i^t \beta \\ \text{ou} \\ \eta &= X\beta\end{aligned}\tag{2.45}$$

sendo  $X = (x_1, \dots, x_n)^t$  a matriz do modelo,  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)^t$  o vetor dos parâmetros e  $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)^t$  o preditor linear.

Define-se uma função chamada de função ligação, que relaciona o componente aleatório ao componente sistemático, ou seja, vincula a média ao componente linear, isto é,

$$g(\mu_i) = \eta_i\tag{2.46}$$

Para estimar os parâmetros  $\beta$ , utiliza-se o método de máxima verossimilhança, que é realizado através de processo iterativo. O algoritmo foi desenvolvido por Nelder e Wedderburn (1972) e se baseia no método Escore de Fisher.

Portanto, para escolha do MLG é importante definir a distribuição da variável resposta, a matriz do modelo e a função de ligação.

Para testar a significância dos coeficientes, recomenda-se usar a função desvio (*deviance*). A deviance de um modelo qualquer é definida como sendo o desvio deste modelo em relação ao modelo saturado, conforme a definição:

$$D = -2 \ln \left[ \frac{L_{mod}}{L_{sat}} \right]\tag{2.47}$$

onde  $L_{mod}$  é a função de máxima verossimilhança do modelo em questão e  $L_{sat}$  é a função de máxima verossimilhança do modelo saturado, que é o modelo para o qual os valores ajustados  $\mu_i$  são iguais às respostas observadas  $y_i$ .

Uma medida utilizada para selecionar o modelo mais parcimonioso entre os ajustados, ou seja, que esteja bem ajustado e com um número reduzido de parâmetros, é o critério de informação de Akaike (AIC).

Nos modelos de regressão uma das medidas da qualidade do ajuste é o chamado coeficiente de determinação ou  $R^2$ . A medida de qualidade do ajuste proposto por Nagelkerke (1991), é amplamente utilizados nos estudos MLG, e por esse motivo chama-se de  $R^2$  de Nagelkerke e escreve-se como  $R_N^2$ , e é definida como:

$$R^2 = 1 - \left[ \frac{L(0)}{L(\hat{\beta})} \right]^{2/n} \quad (2.48)$$

Onde  $L(0)$  é a verossimilhança do modelo nulo que contém apenas a constante, ou seja, a média geral e  $L(\hat{\beta})$  a verossimilhança do modelo estimado, calculando um  $R_{max}^2 = 1 - (L(0))^{2/n}$  e fazendo:

$$R_N^2 = \frac{R^2}{R_{max}^2} \quad (2.49)$$

Definindo assim o  $R^2$  de Nagelkerke.

Para verificar se existe adequação e nenhum afastamento sérios das suposições feitas do modelo aos dados é importante analisar os gráficos das medidas de diagnóstico, para identificar pontos aberrantes e influentes e avaliar a distribuição dos erros aleatório.

Algumas referências para o estudo dos MLG são: CORDEIRO (1986), MCCULLAGH e NELDER (1989) e PAULA (2004).

## 3 Material e Métodos

### 3.1 Logística

Um conjunto de inovações ocorre constantemente no mercado, onde observa-se uma dinâmica nunca antes constatada na oferta de produtos.

A logística tem papel fundamental na distribuição e ofertas desses produtos ao consumidor. É a logística que garante a distribuição desses produtos ao consumidor final.

De acordo com NOVAES (2007) logística é caracterizado como:

“Logística é o processo de planejar, implementar e controlar de maneira eficiente o fluxo e a armazenagem de produtos, bem como os serviços e informações associados, cobrindo desde o ponto de origem até o ponto de consumo, com o objetivo de atender aos requisitos do consumidor”

Ainda segundo Novaes a logística empresarial agrega 4 tipo de valores positivos para o consumidor. O valor de lugar, de tempo, de qualidade e de informação da cadeia produtiva.

Um tipo de operação de logística integrada moderna é denominado de *Supply Chain Management (SCM)* ou em português, Gerenciamento da Cadeia de Suprimento. A seguinte definição é adotada pelo Fórum de SCM realizado na *Ohio State University*

“SCM é a integração dos processos industriais e comerciais, partindo do consumidor final e indo até os fornecedores iniciais, gerando produtos, serviços e informações que agreguem valor para o cliente.”

Uma demanda crescente na logística envolve o comércio eletrônico. Em geral esse serviço é realizado por empresas especializadas em encomendas expressas.

A logística representa para o negócio via internet o maior percentual de valor envolvido no seu processo. Utilizar-se do enfoque na logística é uma estratégia pela qual o comércio eletrônico pode obter vantagens competitivas na obtenção de menores custos.



## 3.2 Dados Utilizados

Com o objetivo de aplicar a heurística proposta, foram utilizados dados de uma empresa real que atua no setor de transporte de encomendas expressa no mercado nacional.

Para este trabalho optou-se em criar uma rede de distribuição para o Estado do Paraná, ou seja, esta rede deve abastecer os 399 municípios do Estado do Paraná.

A empresa analisada possui no Estado 22 centralizadores em 6 regiões operacionais e uma administração central.

Foram obtidos junto a empresa a quantidade de encomendas entregue em cada cidade do Paraná no ano de 2009, e calculado uma média diária de objetos entregues por dia (em metros cúbicos) por cidade.

Para a entrega desses objetos a empresa possui uma série de contratos de transporte no Estado do Paraná, sendo que em cada contrato é definido o tipo de veículo, a quantidade a ser transportada, a quilometragem, com um prazo fixo para realizar esse trabalho, onde cada contrato tem um custo específico.

Ainda foi levantado junto a empresa um custo fixo aproximado para as unidades de distribuição da empresa.

## 3.3 Metodologia

Para o cálculo do custo de transporte foi ajustada uma função utilizando Modelos Lineares Generalizados (MLG), utilizando os dados referentes aos contratos de transporte. Essa função considera a quantidade transportada e a quilometragem percorrida, permitindo assim, um custo estimado para entregar um volume de encomendas, de qualquer ponto  $i$  ao  $j$ , no Estado do Paraná.

Após definidos os valores da variável custo ( $c_{ij}$ ), aplicou-se a heurística de Teitz e Bart para localizar 22 centralizadores, localizando assim o terceiro nível, comparando-se com os centralizadores já definidos pela empresa.

Na sequência, é realizada a re-atribuição dos nós encontrados e localizados 6 centralizadores de segundo nível, e para o último estágio da aplicação é localizado através do algoritmo de  $p$ -medianas um único centralizador principal (ou primeiro nível).

A lógica é que a encomenda segue sempre do centralizador principal para o central-

izador de segundo nível, e deste para o centralizador de terceiro nível e finalmente o consumidor.

Um segundo caso foi analisado levando em consideração o custo fixo de operação da unidade de distribuição.

Os modelos propostos foram implementados no software R.2.10, e os testes computacionais foram realizados em um computador equipado com um processador AMDTurion com 2.0 GHz de velocidade, 1 GB de memória RAM e 120 GB de armazenamento de HDD.

## 4 Análise dos Resultados

### 4.1 Função de Custo do Transporte

Um resumo dos dados na tabela de contratos da empresa, é observado na tabela 4.1, contendo no total 64 contratos, onde o **custo** é o valor em reais mensal de cada contrato, a **distância** em quilômetros percorrida por dia e a **quantidade** em metros cúbicos que cada caminhão pode transportar.

Tabela 4.1: Resumo das Principais Medidas na Tabela de Contratos de Transporte

<i>Medidas</i>	Custo	Distância	Quantidade
<i>Mínimo</i>	3822,00	89,17	9,00
<i>1º Quartil</i>	5615,00	257,08	10,00
<i>Mediana</i>	7003,00	327,08	18,00
<i>Média</i>	10326,00	379,82	25,91
<i>3º Quartil</i>	9780,00	381,12	41,00
<i>Máximo</i>	58358,00	1430,00	85,00

Fonte: Tabela de Contratos Fornecido Pela Empresa

Verifica-se na tabela 4.1 o valor **Mínimo** encontrado de cada variável analisada, o 1º **Quartil** que representa 25% do valor da amostra ordenada, a **Mediana** que representa 50% do valor da amostra ordenada, a **Média** aritmética das variáveis, o 3º **Quartil** que representa 75% dos dados analisados e o valor **Máximo** das variáveis.

Para verificar a distribuição dos dados foi gerado o histograma e um gráfico de percentil da variável custo, apresentada na figura 4.1, onde possibilitou-se verificar uma assimetria dos dados em seu formato. A natureza continua dos dados em um intervalo contínuo de variação sugere que a distribuição dos dados segue um modelo gama.

Atribuiu-se a variável custo uma distribuição Gama, através de um modelo linear generalizado, selecionou-se de um conjunto de função de ligação aquela com o menor desvio e menor AIC que ajuda a selecionar o modelo mais parcimonioso comparando com as demais funções de ligação, e modelou-se a média como:

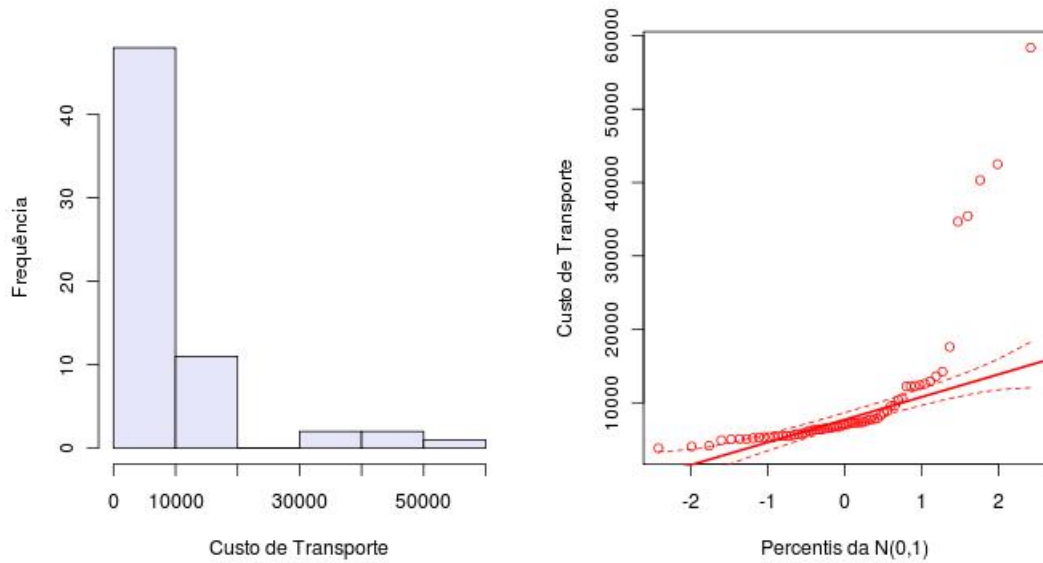


Figura 4.1: Histograma e Gráfico de Percentis da Normal Padrão Variável Custo

$$g(\mu) = \eta$$

Foi selecionada desse conjunto de funções de ligação a logarítmica, onde

$$\begin{aligned} \log(\mu) &= \eta \\ \mu &= e^{\eta} \end{aligned}$$

Construiu-se então, o seguinte modelo para a função de regressão linear generalizada com duas covariáveis, distância e quantidade para explicar a variável custo. Segue abaixo o modelo:

$$custo = e^{\beta_0 + \beta_1 distancia + \beta_2 quantidade} \quad (4.1)$$

A tabela 4.2 mostra as estimativas dos parâmetros, os coeficientes  $\beta$  do modelo gama com função de ligação logarítmica para o custo de transporte, o erro padrão e a significancia dos coeficientes do modelo.

Assim pode-se escrever o modelo para função de custo de transporte de um ponto  $i$  ao  $j$  como:

$$custo = e^{8,140148 + 0,001434 distancia + 0,013101 quantidade} \quad (4.2)$$

Tabela 4.2: Estimativas dos Coeficiente do Modelo

<i>Covariável</i>	Coeficiente Estimado	Erro Padrão	Valor-p
<i>Intercepto</i>	8,140148	3,277e-02	2e-16 ***
<i>Distância</i>	0,001434	9,013e-05	2e-16 ***
<i>Quantidade</i>	0,013101	1,138e-03	2e-16 ***

Para verificar a qualidade do ajuste do modelo e a contribuição que cada variável regressora apresenta para o modelo foi verificado o valor da deviance de 1,1694. Aplicando o teste  $\chi^2$  verifica-se a aceitação do modelo.

O  $R_N^2 = 0,96$ , o que indica um bom ajuste do modelo aos dados e conclui-se que conforme é aumentada a distância e a quantidade transportada, aumenta o custo do transporte. A superfície de resposta da função de custo ajustado pode ser verificado no gráfico da figura 4.2 no apêndice A.1 na página 59 observam-se os gráficos de diagnóstico referentes ao modelo ajustado.

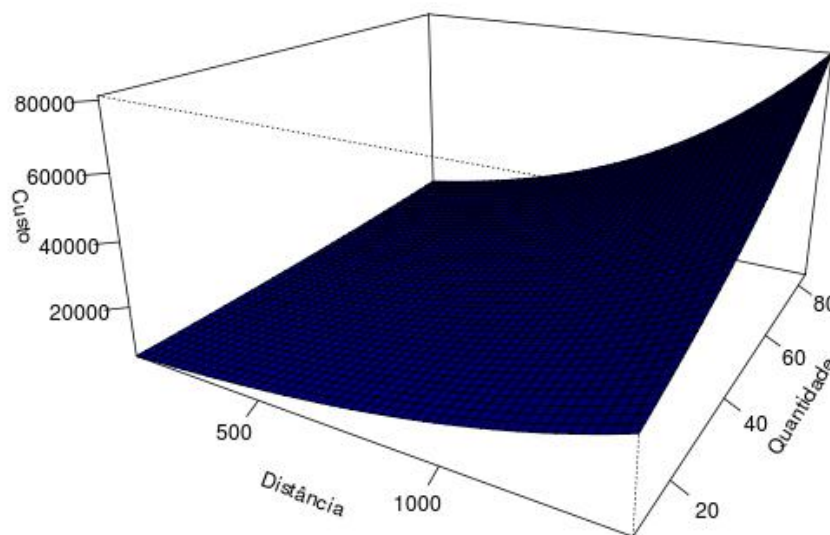


Figura 4.2: Superfície de Resposta da Função de Custo

Construiu-se uma matriz de custo de transporte utilizando o modelo para estimar os

valores de transporte do ponto  $i$  ao ponto  $j$ , onde utilizamos a função da seguinte forma:

$$c(v_i, v_j) = \begin{cases} e^{8,140148+0,001434d_{ij}+0,013101w_j}, & \text{se } i \neq j \\ 0, & \text{se } i = j \end{cases} \quad (4.3)$$

Onde  $c(v_i, v_j)$  é o custo do transporte da vértice  $i$  ao vértice  $j$ ,  $d$  é a distância do ponto  $i$  ao  $j$  e  $w_j$  é a quantidade de encomenda do ponto  $j$ . Essa função é utilizada a seguir para o cálculo da heurística.

## 4.2 Aplicação da heurística de Teitz e Bart com Hierarquia

Para aplicação da heurística calculou-se a média diária do volume de encomendas que foram entregues no ano de 2009, no Estado do Paraná. A média encontrada é de  $431,32m^3$ , sendo que apenas a cidade de Curitiba participou com uma média distribuída de  $149,5m^3$  o que equivale a 34,7% do volume distribuído, seguido pela cidade de Londrina com 7,67%, Maringá com 6,38%, Cascavel com 3,56%, Ponta Grossa com 2,89%, Foz do Iguaçu com 2,43%, São José dos Pinhais com 2,39% e todas as outras cidades do Paraná participaram com os percentuais menores que 2%.

A tabela 4.3 mostra a quantidade de encomendas distribuída por classes, calculado com *percentil 20%*, o número de cidades dentro de cada classe, e quantidade total de encomendas distribuídas dentro de cada classe.

Tabela 4.3: Quantidade de Encomendas por Classes

<i>Classes</i>	<i>Cidades</i>	<i>Quant. Total</i>
<i>0 - 0,04</i>	75	1,95
<i>0,04 - 0,09</i>	89	5,53
<i>0,09 - 0,19</i>	76	10,30
<i>0,19 - 0,51</i>	78	25,03
<i>0,51 - 149,5</i>	81	388,45
<i>Totais</i>	399	431,29

Fonte: Dados Fornecido Pela Empresa

A figura 4.3 mostra a distribuição do volume de encomendas da tabela 4.3 no mapa do Estado do Paraná por cidade.

Para aplicação da heurística calculou-se os centróides de cada cidade do Estado. As

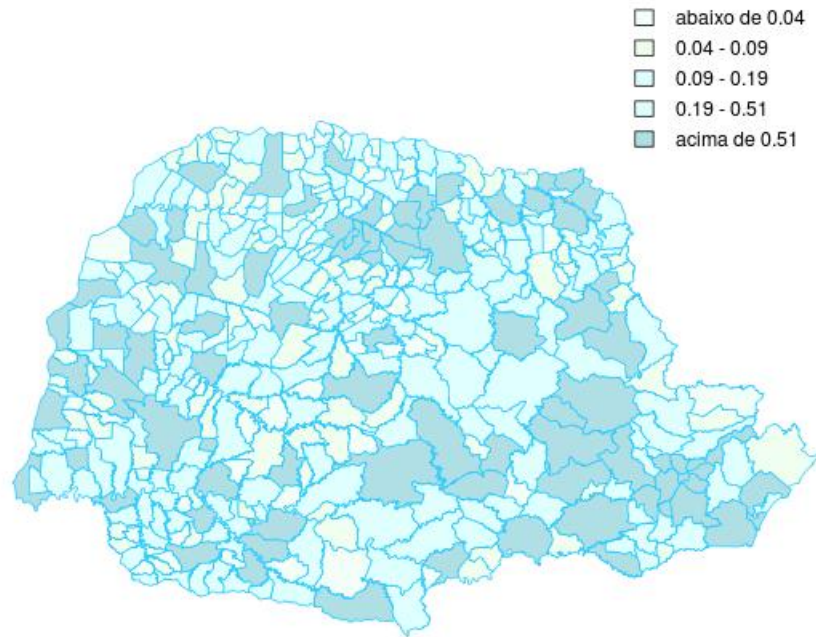


Figura 4.3: Mapa de Volume de Encomendas por Cidades

distâncias de uma cidade a outra foram calculadas através da distância euclidiana, sendo usada a correção indicada por NOVAES (1978) de 1,3 para a distância, afim de minimizar o erro da distância real, produzindo assim uma matriz de distâncias.

Utilizando-se da função descrita na fórmula 4.3 aplicou-se as distâncias  $d$  da cidade  $i$  a cidade  $j$ , e a quantidade média  $w$  de encomendas que cada ponto  $j$  recebe, obtendo-se assim uma matriz de custo de transporte com dimensão de 399x399. Nesse caso, a matriz não é simétrica, existindo assim uma diferença na resolução de problema de *in-transmission* e *out-transmission*. O caso avaliado nesse trabalho é de *out-transmission*.

A proposta para o cálculo do subconjunto do vértice  $V_p$  das  $p$ -medianas até o vértice  $v_j$  utilizando os valores de custo de transporte, para o número de transmissão é definida da seguinte forma:

$$\sigma_o(V_p) = \sum_{v_j \in V}^n c(V_p, v_j) \quad (4.4)$$

Para o exemplo foi aplicada a heurística de Teitz e Bart com 3 hierarquias, onde o terceiro nível tem 22 centralizadores, o segundo nível 6 e um único centralizador principal ou de primeiro nível.

Aplicou-se a heurística para localizar 22  $p$ -medianas e o resultado obtido pode ser verificado na tabela 4.4, onde fluxo é a quantidade de encomendas que passa pelo centralizador, o percentual em relação a quantidade de encomendas e o número de cidades que esse centralizador atende.

Tabela 4.4: Centralizadores do Terceiro Nível

<i>Centralizadores</i>	Fluxo	Percentual	Cidades
<i>FOZ DO IGUACU</i>	13,97	3,24%	8
<i>MARECHAL CANDIDO RONDON</i>	9,68	2,24%	17
<i>CAFEZAL DO SUL</i>	9,92	2,30%	17
<i>SANTA IZABEL DO OESTE</i>	9,90	2,29%	30
<i>NOVA AURORA</i>	19,85	4,60%	18
<b><i>DIAMANTE DO SUL</i></b>	<b>2,83</b>	<b>0,66%</b>	<b>16</b>
<i>PLANALTINA DO PARANA</i>	4,06	0,94%	25
<i>PATO BRANCO</i>	8,77	2,03%	17
<i>CIANORTE</i>	11,38	2,64%	21
<i>CANDOI</i>	8,56	1,98%	15
<i>PARANACITY</i>	5,29	1,23%	15
<b><i>MARINGA</i></b>	<b>35,08</b>	<b>8,13%</b>	<b>25</b>
<i>JARDIM ALEGRE</i>	4,36	1,01%	27
<i>MIRASELVA</i>	6,48	1,50%	20
<b><i>LONDRINA</i></b>	<b>44,92</b>	<b>10,42%</b>	<b>17</b>
<i>RIO AZUL</i>	8,30	1,92%	19
<i>TELEMACO BORBA</i>	4,74	1,10%	10
<i>PONTA GROSSA</i>	15,95	3,70%	7
<i>SANTA AMELIA</i>	9,22	2,14%	20
<i>TOMAZINA</i>	4,68	1,09%	19
<b><i>CURITIBA</i></b>	<b>182,98</b>	<b>42,42%</b>	<b>24</b>
<i>ANTONINA</i>	10,41	2,41%	12
<i>Totais</i>	431,42	100,00%	399

O tempo para o processamento foi de 25 minutos, e o custo da rede ficou em **1.390.098,00** e pode-se verificar que o centralizador de Curitiba é o que tem a maior volume de encomendas num total de  $182,98m^3$  o que equivale a um percentual de 42,42% do volume entregue no Paraná. A quantidade de cidades ligadas a esse centralizador é de 25 municípios, seguido por Londrina com  $44,92m^3$  de encomendas entregues o que equivale a 10,42% e com 17 cidades



ligadas a ela. Em terceiro lugar Maringá com  $35,08m^3$  de encomendas entregues o que equivale a 8,13% volume do Estado e 25 cidades ligadas a esse centralizador, onde denotou-se esses centralizadores encontrados de Terceiro Nível.

Verifica-se que o centralizador com menor volume de entrega é Diamante do Sul com  $2,83m^3$  o que equivale a 0,66% do volume entregue no Estado e esse centralizador possui 16 cidades ligadas a ele.

O centralizador com o maior número de cidades conectado a ele é Santa Izabel do Oeste com 30 cidades e entrega um volume de  $9,90m^3$  o que equivale a 2,29% do volume entregue no Estado. O centralizador com menor número de cidades conectadas a ele é Ponta Grossa com 7 municípios e distribui uma quantidade de  $15,25m^3$  o que equivale a 3,70% do total de encomendas entregues no Estado.

A figura 4.4 mostra o mapa do Estado do Paraná e como os centralizadores foram distribuídos no Estado. Os pontos em vermelho indicam a cidade onde se encontra o centralizador.

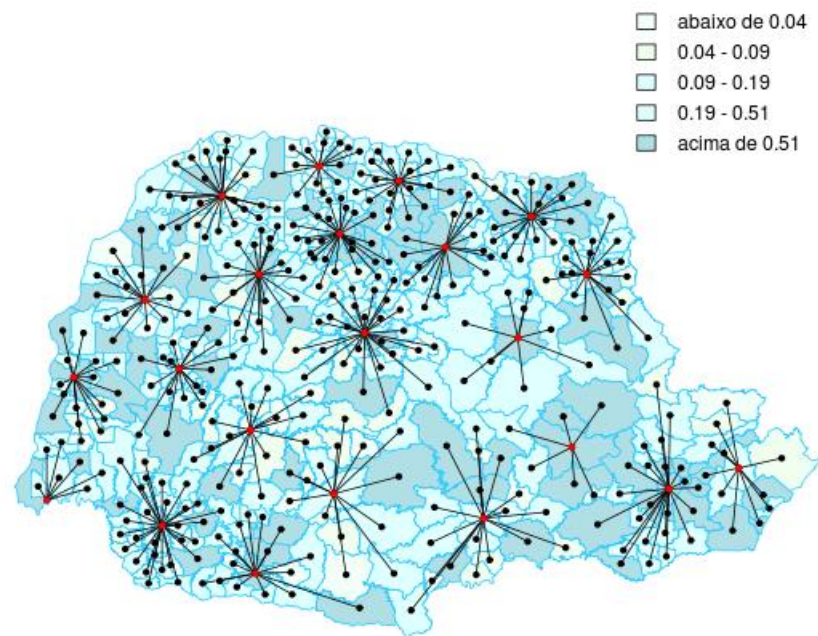


Figura 4.4: Mapa de Centralizadores Terceiro Nível

Em geral verifica-se que cidades com grande volume de demanda de encomendas receberam um centralizador para sua região, pois o custo decorrente para a transmissão de encomendas para essas cidades ficaria alto, caso ele recebesse seu volume de outro centralizador.

Esta afirmação no entanto não ocorreu para a região que contém a cidade de Cascavel, pois mesmo ela sendo a quarta em volume de encomendas entregues no Estado, esta conectada ao centralizador da cidade de Nova Aurora, onde o volume de encomendas é muito pequeno.

Para localizar os centralizadores de segundo nível, é realizada uma re-atribuição a partir dos 22 centralizadores localizados no terceiro nível. Os centralizadores de terceiro nível são responsáveis pela quantidade de fluxo de encomendas que passa pela sua região, conforme verificado na tabela 4.4, assim é utilizada a distância euclidiana com a correção indicada por NOVAES (1978) de 1,3 do centralizador do ponto  $i$  ao centralizador do ponto  $j$ .

Para o cálculo da matriz de custo é utilizada novamente a fórmula descrita em 4.3, onde a distância  $d$  é a distância entre o centralizador  $i$  ao centralizador  $j$  localizado no terceiro nível, a quantidade  $w$  é o fluxo de encomendas no centralizador referente a sua região, produzindo assim uma matriz de custo não simétrica com dimensão de 22x22.

O resultado da aplicação da heurística para  $p$  igual a 6 pode ser observado na tabela 4.5, onde o fluxo é o volume de encomendas que passa pelo centralizador de segundo nível, o percentual em relação a quantidade de fluxo de encomendas do Estado, a quantidade de centralizadores de terceiro nível ligados ao centralizadores de segundo nível e a quantidade de cidades que cada centralizador de segundo nível é responsável.

Tabela 4.5: Centralizadores do Segundo Nível

<i>Centralizadores</i>	Fluxo	Percentual	Terceiro Nível	Cidades
<i>SANTA IZABEL DO OESTE</i>	41,19	9,55%	4	70
<i>NOVA AURORA</i>	42,28	9,80%	4	68
<b>MARINGÁ</b>	<b>66,64</b>	<b>15,45%</b>	<b>6</b>	<b>133</b>
<b>LONDRINA</b>	<b>63,58</b>	<b>14,74%</b>	<b>4</b>	<b>66</b>
<i>PONTA GROSSA</i>	<i>24,25</i>	<i>5,62%</i>	<i>2</i>	<i>26</i>
<b>CURITIBA</b>	<b>193,38</b>	<b>44,83%</b>	<b>2</b>	<b>36</b>
<i>Totais</i>	431,42	100,00%	22	399

O custo dessa operação é de **71.250,40**, então para saber o custo total da rede somamos o custo calculado pela heurística para localizar os centralizador de segundo nível e o custo calculado pela heurística para localizar os centralizadores de terceiro nível, obtemos assim o valor de **1.461.339,04**. A configuração dos centralizadores de terceiro e segundo nível pode ser verificado na figura 4.5, onde os pontos azuis são os centralizadores de segundo nível.

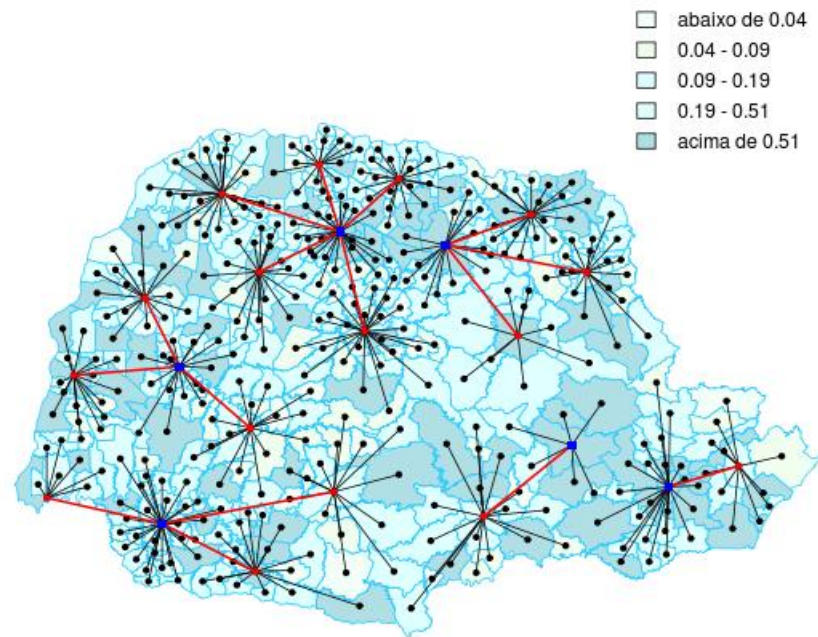


Figura 4.5: Mapa de Centralizadores Segundo Nível

Na tabela 4.5 é possível verificar que a cidade de Curitiba é onde se encontra o centralizador com maior fluxo de encomendas um total de  $193,38m^3$  o que equivale em percentual a 44,83% e é responsável em abastecer 2 regiões, a de Curitiba e o centralizador do terceiro nível de Antonina com um total de 36 municípios abastecidos.

O centralizador de Maringá assume a segunda posição no número de fluxo de encomenda no Estado com um volume de  $66,64m^3$  distribuídos com um percentual de 14,74% do total do Estado e conectado a ele 5 centralizadores do terceiro nível, abastecendo assim 6 regiões diferentes com um total de 133 cidades.

O centralizador de Londrina obtém a terceira posição no total de encomendas centralizadas no segundo nível com um volume total de  $63,58m^3$  o que representa em termos percentuais a 14,74% com 3 centralizadores de terceiro nível conectado a ele, ou seja responsável em abastecer 4 regiões o que equivale a 66 municípios.

Em seguida aparece o centralizador de Nova Aurora com um total  $42,28m^3$  equivalente a 9,80% do total distribuído no Estado com 3 centralizador de terceiro nível conectado a ele abastecendo 4 regiões em um total de 68 cidades, característica semelhante ao centralizador de Santa Izabel do Oeste com  $41,28m^3$  distribuído com um percentual de 9,55% com 3 centralizadores do terceiro nível abastecendo 4 regiões diferente com um número de 70 cidades.

Em último vem Ponta Grossa com o menor volume de encomendas distribuídas no Estado com um total de  $24,25m^3$  correspondendo a 5,62%, com um unico centralizador de terceiro nível conectado a ele, abastecendo assim duas regiões em um total de 26 cidades.

O tempo de processamento para a localização dos centralizadores de segundo nível foi de aproximadamente 30 segundos. Essa diferença em relação ao tempo da localização dos centralizadores do terceiro nível se deve a quantidade de vértices analisados em cada caso. Enquanto que para localizar os centralizadores de terceiro nível a heurística analisou 399 vértices, para localizar 22 no terceiro nível ela analisou os 22 vértices para achar 6 centralizadores de segundo nível.

Para localizar o centralizador principal ou o centralizador de primeiro nível utilizou-se os dados referentes ao fluxo de cada centralizador de segundo nível na tabela 4.5 e calculada a distância de um centralizador secundário em relação a outro centralizador de segundo nível. Foi feita novamente a correção na distância proposta e aplicada novamente a fórmula definida em 4.3, produzindo assim uma matriz de custo não simétrica 6x6.

A solução nesse caso para um único centralizador foi realizada através do modelo de  $p$ -medianas definido na seção 2.3.1, pois o algoritmo heurística de Teitz e Bart proposto é adequado para solucionar problemas com uma grande quantidade de números de vértices obtendo uma solução aproximada. Assim para hierarquia com poucas vértices é indicada a utilização do modelo de  $p$ -mediana.

O centralizador encontrado através da solução do problema de  $p$ -medianas é a cidade de Curitiba. O valor da função objetivo é de **59.549,69**, onde esse valor deve ser somado com o custo encontrado no segundo nível e terceiro nível. Assim a rede com 3 hierarquias tem um custo total de **1.520.888,73**, e a representação dessa rede pode ser observada no mapa da figura 4.6, onde o ponto verde represnta a cidade de Curitiba.

Pode-se dizer que a aplicação da heurística com a hierarquia levou em consideração os locais com maiores demandas pois a cidades de Curitiba participa com o maior percentual de encomendas distribuídas no Estado. A aplicação da heurística construiu uma rede de abastecimento que a partir de um ponto ela alcance qualquer parte no Estado com o menor custo e

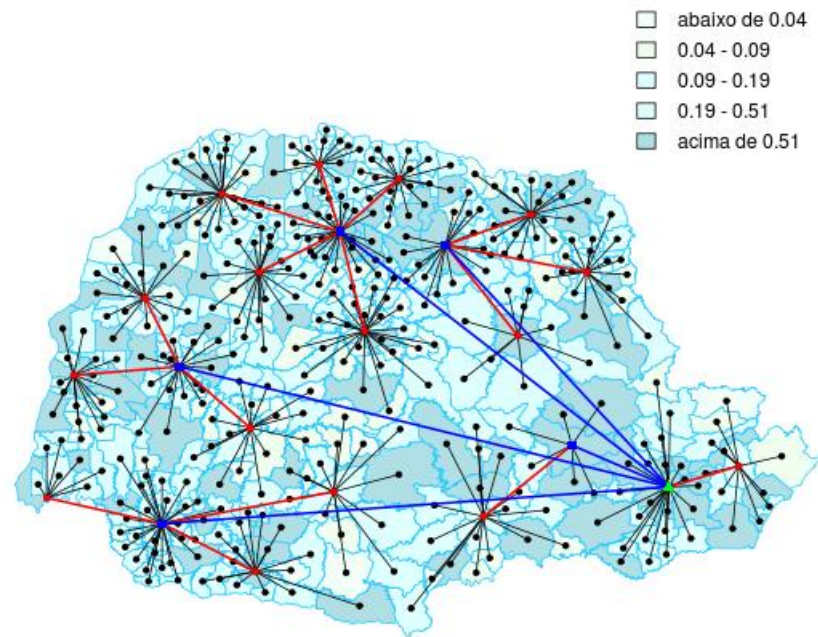


Figura 4.6: Mapa de Centralizador Principal

tempo, levando em consideração a distância e a quantidade de demanda que cada região.

### 4.3 Aplicação da heurística de Teitz e Bart com Custo Fixo

Na proposta de aplicar a heurística de Teitz e Bart com custo fixo de operação, implica na necessidade de se definir o valor da variável de custo fixo. Os valores obtidos junto a empresa demonstrou ser de difícil definição para a unidade selecionada.

Um exemplo é que a empresa não trabalha apenas com transporte de encomendas expressas, tendo mais atividades em seu rol de serviços, exigindo assim que seu custo de operação seja maior do que o necessário para trabalhar apenas com encomendas.

Um outro fator importante é que a operação da empresa não é somente de envio de encomendas, mas também de captação de encomendas. O algoritmo que utilizou-se é *out-*

*transmission*, ou seja apenas de envio dessa encomenda, onde para equilibrar melhor o custo fixo deveria ser levado em consideração os resultados de *in-transmission*, deixando assim o custo da empresa maior e justificando assim tal custo fixo.

Uma possibilidade seria levantar o custo de instalação da unidade e não considerar apenas o custo de operação mensal, e ponderar o custo de transporte em um período maior avaliando assim, um tempo de retorno do investimento feito na instalação.

Para definir o custo de operações nas 399 cidades do Estado do Paraná existe a exigência de levantamento de uma série de fatores que são de difícil acesso.

Na prática o custo de operação de uma unidade de redistribuição, deve-se considerar as despesas mensais de manutenção dessa unidade, como: Aluguel do imóvel ou compra, funcionários alocados nessa unidade, água, luz, telefone, impostos, taxas e uma série de custos que pode ser atribuído às unidades.

Para conhecer o valor do custo dessas unidades citadas, depende da quantidade de carga de encomenda que cada unidade centraliza e os valores de cada despesa que podem variar de cidade para cidade. A quantidade de cidades ligadas a esse centralizador e o fluxo de carga seria conhecida após a aplicação da heurística, o que pode mudar os valores referentes ao custo fixo.

Em geral, o valor do custo fixo pode depender da quantidade de investimento que a empresa tem disponível para abertura destas unidades.

Optou-se assim em assumir um custo fixo para o exemplo de 20.000,00 mensais iguais para todas as cidades do Estado Paraná e aplicar ao exemplo apenas como demonstração do método.

O procedimento para o cálculo de valor do custo do transporte é o mesmo realizado através da fórmula 4.3 e a proposta para o cálculo do subconjunto do vértice  $V_p$  das  $p$ -medianas até o vértice  $v_j$  utilizando o custo fixo. Assim, definimos o número de transmissão da seguinte forma:

$$\sigma_o(V_p) = \sum_{v_j \in V}^n c(V_p, v_j) + \sum_{v_i \in S} cf_{v_i} \quad (4.5)$$

O resultado da aplicação da heurística de Teitz e Bart com custo fixo, pode ser observado na tabela 4.6.

O tempo de processamento da heurística foi de aproximadamente 19 minutos, e a quan-

Tabela 4.6: Centralizadores do Segundo Nível

<i>Centralizadores</i>	Fluxo	Percentual	Cidades
<i>TOLEDO</i>	46,29	10,73%	54
<i>DOIS VIZINHOS</i>	20,42	4,73%	57
<i>CIDADE GAUCHA</i>	21,22	4,92	52
<i>MARINGA</i>	61,21	14,19%	86
<i>GUARAPUAVA</i>	19,37	4,49%	46
<i>RIBEIRAO DO PINHAL</i>	53,56	12,42%	61
<i>CURITIBA</i>	209,24	48,51%	43
<i>Totais</i>	431,42	100,00%	399

tidade de  $p$ -medianas que equilibra o custo total é 7, e o valor do custo total é de **1.654.849,00**.

Pode-se observar na tabela 4.6 que o centralizador com maior fluxo é a cidade de Curitiba com um total de encomendas distribuída de  $209,24m^3$  o que equivale a 48,51% do total distribuído no Estado, atendendo 43 cidades. O centralizador de Guarapuava é o que apresenta menor volume de encomendas entregue em um total de  $19,37m^3$  o que equivale a 4,49% atendendo a demanda de 46 cidades. A representação desse resultado pode ser observado no mapa da figura 4.7.

No gráfico da figura B.1 no apêndice B na página 58, pode-se observar o melhor resultado do custo total para cada quantidade de medianas, onde observa-se que o valor decai conforme aumenta a quantidade de medianas, até chegar em  $p$  igual a 8, onde se verifica um custo total de 1.658.731,00, superior ao custo total de  $p$  igual a 7 que equivale a **1.654.849,00**, o qual nesse caso é o valor ótimo.

Como foram localizados apenas 7 centralizadores, aplicou-se novamente para próxima hierarquia, utilizando o algoritmo de  $p$ -medianas com custo fixo descrito em 2.3.2 na página 14, e atribuiu-se um novo valor a variável de custo fixo de 40.000.00, apenas a título de exemplo para aplicação do algoritmo. Para o valor do custo de transporte foi aplicada a fórmula sugerida em 4.3 conforme os exemplos anteriores e definimos  $p < 3$ .

A solução que nesse caso é exata, o algoritmo definiu um único centralizador principal localizado em Curitiba, com um custo total de **105.439,97**, temos assim uma rede em dois níveis, o segundo nível com 7 centralizadores e o primeiro nível com 1 único centralizador principal, fazendo a soma do custo obtém-se o custo total da rede de **1.760.288,97**, e o resultado pode ser observado no mapa da figura 4.8.



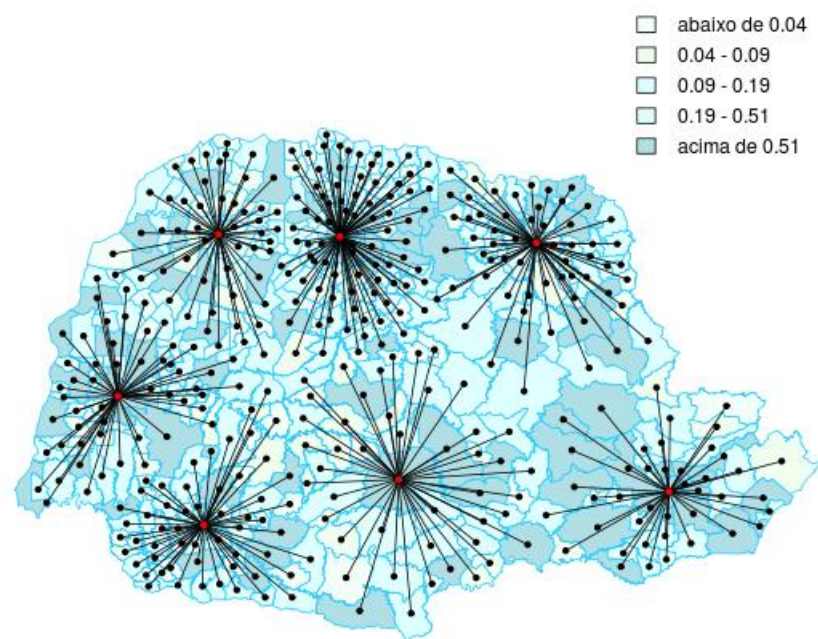


Figura 4.7: Mapa de Centralizadores com Custo Fixo - Segundo Nível



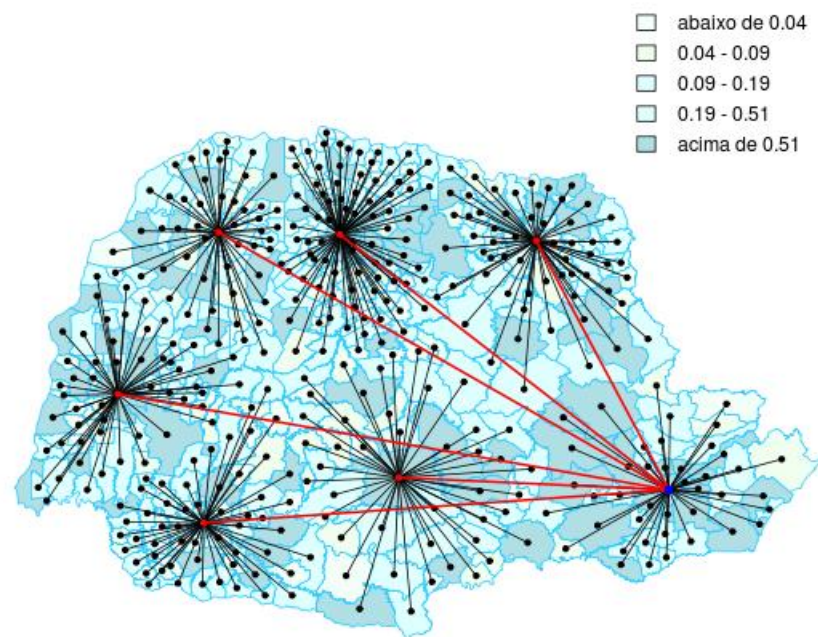


Figura 4.8: Mapa de Centralizadores com Custo Fixo

## 5 Conclusão e Recomendações

O objetivo de uma empresa de transporte de encomendas expressas é atender seus clientes de uma forma ágil, segura e com o menor custo possível.

A proposta da utilização do algoritmo de Teitz e Bart com hierarquia demonstra um resultado satisfatório para operação de envio de encomendas, ou seja para resposta apenas para problemas do tipo *out-transmission* e para problemas com uma grande quantidade de vértices analisados.

Assim, se a empresa tem a necessidade de enviar seus produtos ao consumidor(Ex: mercado eletrônico), a rede apresenta um excelente desempenho para localizar seus centralizadores com seus níveis de hierarquia, permitindo desta forma, avaliar o custo de cada rota de transporte.

Se forem verificados os centralizadores utilizados pela empresa observa-se que 8 centralizadores selecionados pela heurística são iguais as unidades utilizadas pela empresa.

Como já citado anteriormente existe uma série de fatores que dificultam a comparação entre o modelo de rede proposto pela heurística e o modelo real utilizado pela empresa.

Pode-se citar os seguintes:

A empresa oferece um rol de serviços e utiliza sua infraestrutura para tal.

A empresa oferece serviço de entrega e captação desses serviços oferecidos a população e a outras empresas.

A partir de centralizadores da empresa os caminhões realizam uma rota que visita uma série de cidades.

Na construção de uma rota um dos fatores que influência na localização dos centros de distribuição é as condições da estrada e de acesso e não simplesmente a distância.

Para a heurística de Teitz e Bart com custo fixo a maior dificuldade encontrada, além da já citada para o problema sem custo fixo é o levantamento de valores da variável custo fixo.

Verificou-se que o custo fixo operacional dos centralizadores da empresa real é alto em relação ao custo de transporte calculado pela função de transporte, o que leva a heurística proposta a escolher a menor quantidade de mediana possível para o modelo, onde o menor custo de implantação do centralizador supera em muito o custo de transporte.

Assim verifica-se que quanto maior for o custo fixo de operação da variável menor seria a quantidade de medianas.

Para a função de custo de transporte calculado a partir da fórmula 4.3 de um modelo de regressão algumas recomendações importantes devem ser feitas, pois apesar do modelo selecionado se ajustar aos conjunto de dados referentes aos contratos de transporte da empresa. Houve uma extrapolação nos valores preditos na matriz de custo de transporte, o que não é aconselhável estatisticamente.

Isto ocorre por dois motivos:

O primeiro é que pelos contratos, os caminhões da empresa não transportam apenas encomendas expressa.

O segundo motivo é que os contratos também não são realizados para distâncias muito pequenas, se verificarmos a tabela 4.1 observa-se a distância mínima de 89,17 quilômetros.

Logo, pode-se dizer que para quantidades e distâncias pequenas existe uma extrapolação na estimativas do custo de transporte, pois estes valores não fazem parte da superfície de resposta do gráfico 4.2.

## 5.1 Sugestões Para Trabalhos Futuros

Utilizar distâncias reais, considerando a minização de uma variável tempo e aplicação em regiões maiores(Ex:Nacional).

Utilizar o algoritmo do problema de roteamento de veículos (PRV) ou problema do caixeiro viajante (PCV) com  $p$ -medianas para o primeiro nível da hierarquia.

Aplicar o algoritmo de Teitz e Bart, para o custo fixo e sem custo fixo considerando os como *in-transmission* e *out-transmission*.

Aplicar a heurística em problemas que exige a maximização da função objetivo.

Avaliar resultados obtidos através da relaxação Lagrangeana.

Utilizar a função de custo como um modelo estatístico (estocástico), considerando seus

intervalos de confiança para as respostas obtidas, e considerando o modelos de P-Mediana como um modelo estocástico onde pode-se definir a função objetivo como uma esperança matemática, algo do tipo:

$$\text{Min } E[Z] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n E[c_{ij}]x_{ij} \quad (5.1)$$

Utilizar ferramentas de software livres para web e contruir um sistema de informação que forneça por exemplo: Locais de instalação de centralizadores para determinados serviços, o caminho que a encomenda faz até chegar ao consumidor e o tempo estimado de entrega dessa encomenda para o consumidor final, o custo do serviço de entrega dessa encomenda, o custo da linha de transporte e o lucro que gera cada linha de transporte.

## Referências Bibliográficas

ADLER, N; SMILOWITZ, K. **Hub-and-spoke network alliances and mergers: Price-location competition in the airline industry.** Transportation Research Part B. v. 41, 394 - 409, 2007.

ALAMO, J. A. T; BRINATI, M. A. **Modelagem para localização de hubs no transporte de encomendas expressas.** Prod., São Paulo, v. 16, n. 3, Dez. 2006 . Disponível em: [http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S0103-65132006000300009&lng=en&nrm=iso](http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0103-65132006000300009&lng=en&nrm=iso) . Acesso em: 06 Jun. 2009.

BALLOU. R. H. **Logística Empresarial:** São Paulo: Atlas. 1993.

BEZERRA, O. B. **Localização de Postos de Coleta Para ao Escoamento de Produtos Estrativistas - Um Estudo de Caso Aplicado ao Babaçu.** Dissertação de Mestrado, UFSC, Florianópolis, Engenharia de Produção, 1995.

BRYAN, D. L.; O'KELLY, M. E. **Hub and spoke networks in air transportation: an analytical review.** Journal of Regional Science, v. 39, n. 2, p. 275-295, 1999.

CAMARGO, R. S. **Sistemas Eixo Raio de Múltipla Atribuição: Modelos e Algoritmos.** Tese de Doutorado, UFMG, Belo Horizonte, Ciência da Computação, 2007.

CAMPBELL, J. F. **Integer programming formulations of discrete hub location problems.** European Journal of Operational Research, n. 72, p. 387-405, 1994.

CHRISTOFIDES, N. **Graph theory: an algorithmic approach.** New York: Academic Press Inc, London, 1975.

CORDEIRO, G. M. **Modelos lineares generalizados.** VII SINAPE, UNICAMP, 1986.

CORDEIRO, G. M., DEMÉTRIO, C. G. B. **Modelos lineares generalizados.** Minicurso para o 12º SEAGRO e a 52ª Reunião Anual da RBRAS, UFSM, Santa Maria, RS, 2007.

DEMÉTRIO, C. G. B. **Modelos Lineares Generalizados em Experimentação Agrônômica.** Piracicaba: ESALQ/USP, 2002

GALVAO, R. D; NOBRE, F. F; VASCONCELLOS, M. M. **Modelos matemáticos de localização aplicados à organização espacial de unidades de saúde.** Rev. Saúde Pública, São Paulo, v. 33, n. 4, Ago. 1999. Disponível em: [http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S0034-89101999000400014&lng=en&nrm=iso](http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0034-89101999000400014&lng=en&nrm=iso). Acesso em: 05 Out. 2009.

GOLDBARG, M. C.; LUNA, H. P. L. **Otimização Combinatória e Programação linear : Modelos e Algoritmos:** Rio de Janeiro: Campus, 2000.

GONÇALVES, A. D. **Um algoritmo Branch-and-Bound distribuído para o Problema de Steiner em Grafos para execução de Grids.** Dissertação de mestrado, UFF, Niterói, ciência da computação, 2005

HAKIMI, S. L. **Optimum distribution of switching centers in a communication network and some related graph theoretic problems.** Operational Research, London, v.13, p. 462-475, 1965.

HILLIER, F. S.; LIEBERMAN, G. J. **Introdução à Pesquisa Operacional:** Porto Alegre : AMGH, 2010.

MAGALHÃES, M. N. **Probabilidade e Variáveis Aleatórias.** São Paulo: Edusp, 2006.

MCCULLAGH, P; NELDER, J. A **Generalized Linear Models.** London: Chapman and Hall, 1989.

MONTANÉ, F. A. T; FILHO, V. J. M. F; GALVÃO, R. D. **Determinação de Rotas Para Empresa de Entrega Expressa.** Disponível em: [http://www.po.ufrj.br/projeto/papers/Rotas\\_Entrega\\_Encomendas\\_Expressas.pdf](http://www.po.ufrj.br/projeto/papers/Rotas_Entrega_Encomendas_Expressas.pdf). Acesso em: 14 set. 2009.

MURTY, K.G. **Linear and Combinatorial Programming :** Nova York, EUA : JohnWiley, 1976.

NARULA, S. C. **Hierarchical location-allocation problems: a classification scheme.**

European Journal of Operational Research, v. 15, n. 1, p. 93-99, Jan. 1984.

NELDER, J. A.; WEDDERBURN, R. W. M. **Generalized linear models.** Journal of the

Royal Statistical Society, A, v. 135, p. 370-384, 1972.

NOVAES, A. G. **Logística e Gerenciamento da Cadeia de Distribuição:** Rio de Janeiro:

Elsevier. 2007

NOVAES, A. G. **Método de Otimização: Aplicação aos Transportes:** São Paulo: editora

Edgard Blücher, 1978.

NUNES, L. F. **Um Algoritmo Heurístico para Solução de Problema de Grande Escala de**

**Localizações com Hierarquia.** Tese de Doutorado, UFSC, Florianópolis, Engenharia de Produção, 2002.

O'KELLY, M. E, MILLER, H. J. **The hub network design problem.** Journal of Transport

Geography, 2:31-40, 1994.

O'KELLY, M. E. **On the allocation of a set of nodes to a minihub in a package delivery**

**network.** Papers in Regional Science: The Journal of the Regional Science Association International, v. 77, n. 1. p. 77-99, 1998.

PAULA, G. A. **Modelos de Regressão com Apoio Computacional.** São Paulo: IME/USP,

2004.

PUCCINI, A.L. PIZZOLATO, N.D. ;**Programao linear.** São Paulo: LTC, 1987.

RODRIGUES, S. B. **A Metaheurística Colônia de Formigas Aplicada a um Problema de**

**Roteamento de Veículos: Caso da Itaipu Binacional:** Dissertação de Mestrado, UFPR, Curitiba, Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia. 2007.

SENNE, E. L. F ; LORENA, L. A. N. **Abordagens complementares para problemas de**

**p-medianas.** Prod., São Paulo, v. 13, n. 3, 2003. Disponível em: [http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S0103-65132003000300007&lng=en&nrm=iso](http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0103-65132003000300007&lng=en&nrm=iso).

Acesso em: 20 Set. 2009.

SMIDERLE, A. **Técnicas da Pesquisa Operacional Aplicadas a um Problema de Cobertura de Arcos**. Dissertação de Mestrado, UFPR, Curitiba, Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, 2001.

SPIEGEL, M.R. **Estatística**. São Paulo: Makron Books, 1993.

TEITZ, M. B.; BART, P. Heuristics methods for estimating the generalized vertex median of a weighted graph. London: Operations Research Society, 1968.

VALENTE, A. M. PASSAGLIA, E.; NOVAES, A.G. **Gerenciamento de transporte e frotas**: São Paulo. 2001.



## APÊNDICE A – Qualidade dos Resíduos

Gráfico de diagnóstico do modelo Gama com função de ligação log ajustada para os dados de custo do transporte.

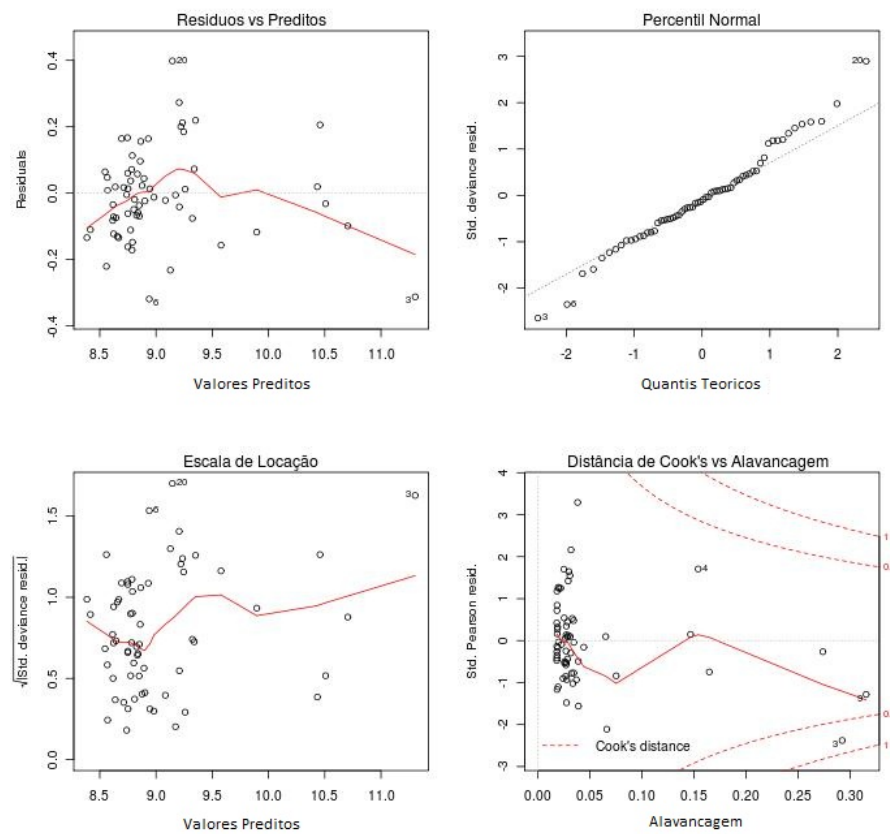


Figura A.1: Gráfico da Qualidade dos Resíduos

## APÊNDICE B – Resultados Computacionais

Resultados computacionais em tempo de processamento da heurística de Teitz e Bart, aplicado a 399 localidades.

Tabela B.1: Tempo Computacional da Heurística de Teitz e Bart

<i>p-mediana</i>	Tempo( <i>Min</i> *)	<i>Custo</i> *
2	0,30	1.771.474,00
3	0,55	1.643.528,00
4	0,73	1.592.867,00
5	1,85	1.559.564,00
6	1,90	1.538.165,00
7	4,37	1.514.849,00
8	5,04	1.498.731,00
9	5,59	1.486.371,00
10	4,97	1.477.381,00
11	6,28	1.466.147,00
12	9,46	1.455.382,00
13	12,88	1.446.651,00
14	12,41	1.439.585,00
15	15,03	1.432.391,00
16	13,79	1.425.293,00
17	17,48	1.418.736,00
18	18,78	1.412.796,00
19	16,21	1.407.998,00
20	19,90	1.401.537,00
21	20,37	1.395.833,00
22	24,94	1.390.089,00

(\*) Tempo em minutos. Custo em reais

Resultados computacionais em tempo de processamento da heurística de Teitz e Bart **com custo fixo** de 20.000,00, aplicado a 399 localidades e a representação gráfica do custo total com a quantidade de *p-mediana* no ponto ótimo.

Tabela B.2: Tempo Computacional da Heurística de Teitz e Bart

$p$ -mediana	Tempo(Min*)	Custo*
2	0,28	1.811.474,00
3	0,48	1.703.528,00
4	0,65	1.672.867,00
5	1,99	1.658.077,00
6	2,93	1.656.544,00
7	4,02	1.654.849,00
8	4,65	1.658.731,00
7	4,08	1.654.849,00
<i>Totais</i>	19,08	-

(\*) Tempo em minutos. Custo em reais

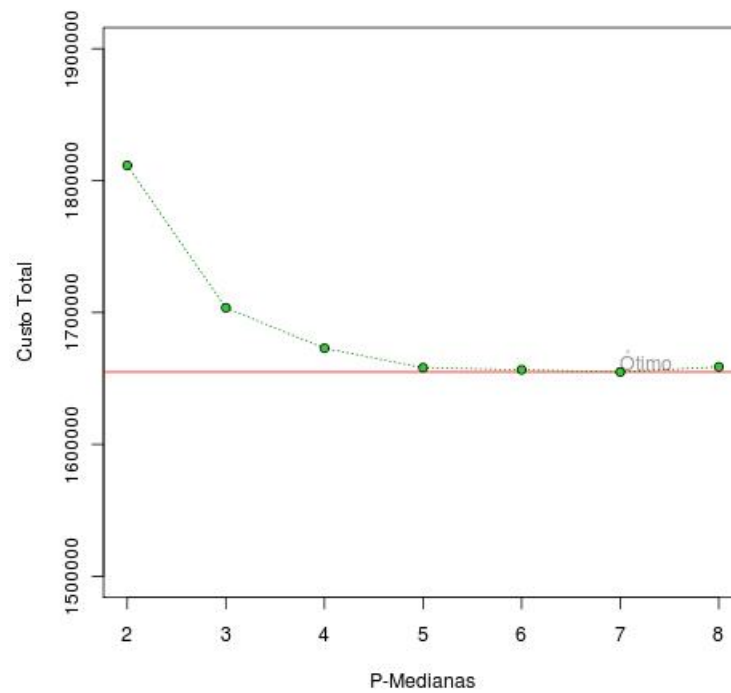


Figura B.1: Custo Total por Quantidade de Mediana

## ANEXO A – Distribuição de Probabilidade

Função da distribuição de probabilidade Uniforme, utilizada para gerar o exemplo da página 20.

$Uniforme(a, b)$ , onde  $a < b$

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, a < x < b$$

média

$$\mu = \frac{a+b}{2}$$

Variância

$$\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Função da distribuição de probabilidade Gama, utilizada para ajustar o modelo da função do custo de transporte.

$Gama(\alpha, \beta)$ , onde  $\alpha, \beta > 0$

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} e^{-\beta x} x^{\alpha-1}, x > 0$$

média

$$\mu = \frac{\alpha}{\beta}$$

Variância

$$\sigma^2 = \frac{\alpha}{\beta^2}$$

## **ANEXO B – Custo Operacional do Transporte**

### **Custo do transporte rodoviário definido pela empresa.**

A composição do Custo Operacional (CO) é a seguinte.

#### **a) Custo fixo:**

- salário do condutor;
- encargos e benefícios sociais;
- depreciação do conjunto (veículo e equipamentos);
- licenciamento;
- seguro obrigatório;
- outros seguros (se houver).

#### **b) Custo variável:**

- combustível;
- óleo de motor;
- óleo de câmbio/diferencial;
- pneus, câmaras e protetores;
- manutenção.

### **Procedimentos para obtenção do Custo Operacional (CO) - Linhas regulares**

Para o cálculo do Custo Operacional (CO) de uma linha de transporte é necessário determinar os seguintes parâmetros específicos dessa linha:

- a) a quantidade de veículos necessários à execução da linha (QV);
- b) o tempo médio que cada veículo permanece à disposição do serviço por mês (HM);
- c) o percurso médio mensal de cada veículo (PM);
- d) as condições da rodovia.

Como regra geral, HM e PM são calculados pelas seguintes expressões:

$$HM = \sum_{i=1}^7 HDi \frac{52}{12 * QV}$$

$$PM = \sum_{i=1}^7 PDi \frac{52}{12 * QV}$$

onde:

- $HDi$  representa o tempo de duração das viagens de ida e volta, iniciadas no dia  $i$  da semana, acrescido do tempo de carregamento/descarregamento;
- $PDi$  representa o percurso das viagens de ida e volta iniciadas no dia  $i$  da semana;
- $i$  representa o dia da semana considerado, expresso numericamente, corrente e variando de 1 a 7 (de domingo a sábado)
- 52 e 12 representam o número de semanas e meses, respectivamente, em um ano.

Índices para a Correção do Custo Operacional (INCO)

Tabela B.1: Tipo de Veículo

Tipo da Rodovia	Motos Leves	Caminhões
Boa	INCO=1,00	INCO = 1,00
Regular	INCO = 1,10	INCO = 1,10
Ruim	INCO = 1,40	INCO = 1,40

O Custo Operacional (CO) da linha será obtido pela aplicação da seguinte expressão:

$$CO = \frac{CF}{PM} + (CV * INCO)$$

onde:

- CF - Custo fixo;
- CV - Custo variável;
- PM - Percorso médio mensal de cada veículo da linha;
- INCO - Índice de Correção do Custo Operacional.

O custo de referência (CR) é dado pela expressão:

$$CR = \left(1 + \frac{Tr}{100}\right) * \left(1 + \frac{TA}{100}\right) * CO$$

- CO = Custo Operacional
- Tr = Tributos
- TA = Taxa de Administração

Estima-se que a taxa de administração pode variar de 2% a 10% do custo operacional. O valor da taxa de administração deverá ser definida em função do tipo e complexidade da linha para o qual o Custo de Referência (CR) está sendo emitido.

### **Análise gráfica para determinação do HM, PM e QV.**

#### **1 Exemplo**

Linha transporte rodoviário entre “A” e “B” distante 1.000 Km, com viagens de ida e volta diárias (partidas simultâneas de “A” e “B”); apresentação do veículo em “A” e “B” às 20:00 horas e liberação na chegada às 18:00 horas do dia seguinte; demanda compatível com o veículo genérico que trata o anexo 1, tipo de estrada considerada boa, taxa de administração de 10% e 17% de tributos.

Tal situação pode ser graficamente representada na figura B.1 da seguinte forma:

Teoricamente, a linha pode ser executada com dois veículos. Todas as viagens são idênticas em percurso. Desta forma, temos:

$$PDi = ida + volta = total$$

$$PDi = 1000 + 1000 = 2000$$

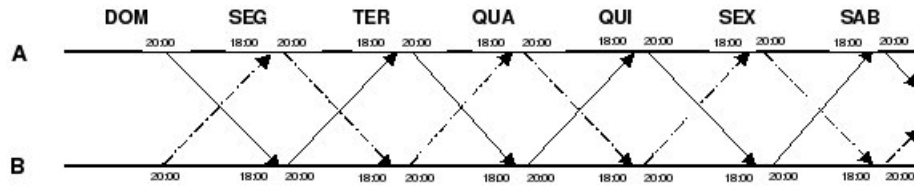


Figura B.1: Representação da Linha de Transporte Rodoviária

No exemplo em questão, entende-se que não há possibilidade de compartilhamento do veículo e condutor no intervalo de tempo entre o final da viagem de ida e o início da viagem de volta. Desta forma, temos:

$$HD_i = ida + volta = total$$

$$HD_i = (2 + 22) + (22 + 2) = 48$$

O total de horas por semana à disposição da linha será:

$$\sum_{i=1}^7 HD_i = 7 * 48 = 336 \text{ horas}$$

A distância percorrida pelos veículos em uma semana será:

$$\sum_{i=1}^7 PD_i = 7 * 2000 = 14.000 \text{ km}$$

O tempo mensal de ocupação de cada veículo da linha será:

$$HM = \sum_{i=1}^7 HD_i \frac{52}{12 * QV} = 336 \frac{52}{12 * 2} = 728 \text{ horas/mes}$$

O percurso mensal de cada veículo da linha será

$$PM = \sum_{i=1}^7 PD_i \frac{52}{12 * QV} = 14.000 \frac{52}{12 * 2} = 30.333 \text{ km/mes}$$

Observa-se que foi ultrapassado o limite de 624 horas/mês estabelecido no subitem 9.6 deste capítulo. Assim, arbitrando-se  $QV = 3$  (três veículos), cada veículo terá, respectivamente, uma ocupação e um percurso mensal de:

$$HM = 336 \frac{52}{12 * 3} = 448 \text{ horas/mes}$$



$$PM = 1400 \frac{52}{12 * 3} = 20222 km/mes$$

Com  $HM = 485$  horas/mês, busca-se na tabela do Referente ao Custo Fixo, a interseção da linha do “veículo genérico” com a coluna de  $HM \leq 572,00$ , obtendo-se assim, o custo fixo por veículo da linha, ou seja,  $CF = R\$7.213,99/mês$ .

Na última coluna, obtém-se o valor do custo variável do veículo, isto é,  $CV = R\$0,168621/Km$ .

O custo mensal (CMT) da linha será obtido a partir da seguinte expressão:

$$CMT = CR \times PM \times QV$$

$$CMT = (1 + Tr/100) \times (1 + TA/100) \times (CF/PM + CV \times INCO) \times PM \times QV$$

No exemplo, em questão, temos:

$$CMT = (1 + 17/100) \times (1 + 10/100) \times (7.213,993072/20.222 + 0,168621 \times 1) \times 20.222 \times 3$$

$$CMT = R\$41.018,67/mes.$$